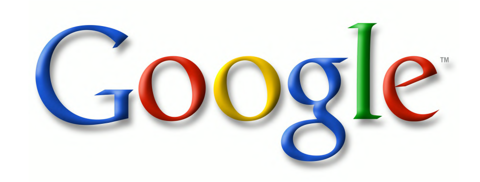



ALPHONSE
PICARD & FILS
EDITEURS
RUE BONAPARTE
82
PARIS VI ARROND
LIBRAIRIE
ANCIENNE
D'OCCASION
COMMISSION
LIVRES NEUFS
FRANÇAIS
&
ETRANGERS

N.-H. ABEL.

SA VIE ET SON ŒUVRE.

37483. — PARIS, IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS,
55, quai des Grands-Augustins.

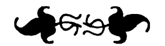


N.-H. ABEL.

SA VIE ET SON ŒUVRE,

PAR

CH. LUCAS DE PESLOÜAN.



PARIS,

GAUTHIER-VILLARS,

1906

A MA CHÈRE FEMME JAN.

NOTE PRÉLIMINAIRE.

Je ne pense pas que ce livre puisse être compris de ceux qui n'ont pas fait des études d'analyse, au moins celles qui répondent au cours de Licence. Il pourra l'être par ceux qui, ayant autrefois étudié l'analyse, ne s'en occuperaient plus aujourd'hui; ils trouveront dans les notes, où sont reproduits de nombreux textes d'Abel, des explications et des développements qui, je crois, suffiront à rappeler leurs souvenirs.



PRÉFACE.

Si l'on veut étudier l'histoire des Mathématiques, c'est-à-dire se rendre compte de la manière dont la pensée mathématique s'est transformée à travers le temps, on est tenté de ne considérer que les œuvres des plus grands géomètres. En fait, on n'étudie que celles-là. Il y a dans cette façon de faire une grave erreur de méthode, car ce qu'on observe alors ne présente pas les caractères d'un développement historique; c'est une séric discontinue de faits dont la découverte semble due uniquement à des à-coups de génie, sans que rien ait fait prévoir ces à-coups; cette série manque donc de continuité. Pour retrouver cette continuité, ce n'est pas dans les textes des Descartes, des Lagrange, des Abel qu'il faut la chercher, mais dans les ouvrages de géomètres plus médiocres, dans des ouvrages didactiques, comme il en fut tant publié depuis le XVI[e] siècle; on trouve alors réellement à l'histoire des Mathématiques le caractère d'une évolution; et si l'on y perçoit encore les interventions géniales — qui malgré tout sont dominantes — on voit que ces

interventions sont préparées, qu'elles étaient pour ainsi dire attendues au moment où nous les rencontrons. Non pas que chez le géomètre qui imprima à la Science un mouvement nouveau, la découverte soit forcément inspirée par des travaux antérieurs, mais, parce que, entre le jour où cette découverte a été connue et le jour où elle a été comprise, il a été fait tout un travail qui a permis de la comprendre. Ce travail de liaison — auquel est due l'apparence de continuité qu'a le développement historique — ne peut pas être négligé; car il a eu parfois pour effet de donner à des théories un caractère différent de celui que leur avait imprimé leur auteur : un exemple très connu est ce que devint la géométrie de Descartes qui, créée plutôt comme algèbre géométrique, forma une géométrie algébrique (1) (*).

Je ne veux pas aller plus loin dans le développement de cette idée; ce que je veux noter, c'est la différence essentielle entre l'étude générale du développement mathématique et l'étude monographique des œuvres des mathématiciens. Cette étude monographique est nécessaire, mais elle doit être faite à côté de la première et dans un esprit tout autre.

Ce que nous cherchions dans l'histoire générale, c'était une sorte de mouvement moyen, résultante des efforts que firent des géomètres de tous ordres, sous l'inspiration des hommes de

(*) Les numéros entre parenthèses renvoient aux notes et aux textes que l'on trouvera à la fin de l'Ouvrage.

génie ; nous n'avions, pour faire cette étude, qu'à *savoir,* qu'à connaître des résultats, à les ordonner, à faire en quelque sorte un travail de fiches, travail infiniment délicat d'ailleurs, car, dans un grand nombre de ces fiches, il faut savoir choisir les plus importantes.

Dans l'étude monographique, ce travail de connaissance et de choix ne suffit plus; le développement de la pensée dans une intelligence ne peut être compris par un moyen de classification; les éléments très divers, souvent incohérents en apparence, qui composent une œuvre, sont, en réalité, intimement liés les uns aux autres, et le lien qui les unit — qu'on le nomme personnalité, génie personnel, originalité, ou de tout autre nom — est ce qui fait de cette œuvre une *Unité*. Ce lien, on ne peut le déterminer analytiquement, mais on peut essayer de le *sentir;* pour y parvenir il n'est pas de méthode; on ne le trouvera pas en se bornant à étudier les travaux les plus importants d'un mathématicien, ceux qui ont pris place dans l'histoire des Mathématiques; il faudra connaître aussi ses études accessoires, ses recherches préparatoires, ses brouillons, ses lectures, en un mot toutes les circonstances de sa vie scientifique, et, en même temps, parallèlement, les circonstances de sa vie matérielle; et l'on ne devra négliger aucun de ces éléments de connaissance, car, dans la formation de ce sentiment d'unité que l'on désire acquérir, on ne sait quels éléments auront la plus grande part.

Je ne me dissimule pas ce qu'un tel travail comporte de diffi-

cultés et d'arbitraire. Pour qu'il pût atteindre à une certaine perfection, il devrait être fait par un esprit très élevé, capable d'embrasser une œuvre et dans son ensemble et dans toutes ses parties, puis de la recréer parallèlement à l'homme de génie qui l'inventa. Il existe quelques ouvrages écrits dans ce sentiment de compréhension sympathique; j'en peux citer un qui n'est pas du domaine des mathématiques, le « Pasteur » de M. Duclaux.

Cette courte introduction suffit à expliquer ce que je désirais faire quand j'ai entrepris d'écrire la vie d'Abel : ce n'était pas un fragment de l'histoire des Mathématiques, mais la vie d'un mathématicien ; on comprendra pourquoi je n'ai pas séparé le récit de son existence de l'analyse de son œuvre ; on excusera enfin ce qu'il y a dans ce travail d'imaginatif, de romanesque même.

Chacun pourra refaire pour lui-même ce que j'ai tenté. Les œuvres d'Abel sont peu volumineuses ; deux tomes de Mémoires et une cinquantaine de lettres publiées dans le *Mémorial du Centenaire*. Les deux Notices de ce Mémorial peuvent suffire à établir un lien entre ces éléments qui sont les Mémoires et les lettres. Il faut y joindre le beau livre de M. Bjerknes : *N.-H. Abel*.

Que ceux auxquels leurs loisirs permettent d'entreprendre un tel travail abandonnent dès maintenant la lecture du livre que voici.

Qu'ils l'abandonnent aussi ceux qui l'ont déjà fait, car ils ne trouveront ici aucun document nouveau.

Pour ceux qui la veulent poursuivre, qu'ils ne m'accusent pas d'avoir eu trop d'ambition, en tâchant de comprendre l'œuvre du plus grand mathématicien du XIXᵉ siècle. Je ne l'ai pas choisi parce qu'il était le plus grand, mais parce qu'aucun autre n'a fait naître en moi les mêmes sentiments d'admiration et de piété.



N.-H. ABEL.

SA VIE ET SON ŒUVRE.

CHAPITRE I.

CHRISTIANIA. — JEUNESSE.
(1802-1825).

A la fin du XVIIIe siècle, la Norvège est une possession de la couronne danoise : depuis trois siècles, sa population de rudes montagnards est soumise à cette domination, elle subit sans révolte les charges que fait peser sur elle l'état suzerain.

Quelques années plus tard, en 1817, par le compromis qui la lie à la Suède, elle devient une nation indépendante, orgueilleuse de sa liberté.

Une unité nationale s'est formée. Au prix de quelles misères! C'est d'abord de 1798 à 1802 une première guerre avec l'Angleterre; en 1807, une seconde guerre contre le même ennemi, puis la campagne contre les Suédois qui viennent, en 1813, de choisir comme roi le général Bernadotte. La paix n'est définitive qu'en 1817.

La guerre fut désastreuse pour ce pays qui ne pouvait suffire, par ses propres ressources, aux besoins de ses habitants. Le

blocus, l'arrêt du commerce amenèrent la famine. Elle fut effroyable pendant 6 années : en 1811, toutes les récoltes ayant gelé, on fit du pain avec de l'écorce.

Mais la population, exaltée par ses souffrances, sentait croître son patriotisme. Race forte et religieuse, elle se soumettait à la direction de ses pasteurs; ces hommes énergiques exhortaient leurs paroissiens à la résistance et les fortifiaient dans l'espérance d'une liberté prochaine.

Niels-Henrik Abel est né dans la famille d'un de ces pasteurs. Première fleur très belle, très haute et très pure, née d'un sol qui se formait, il a grandi entre la misère et l'héroïsme.

Il vint au monde, le 5 août 1802, dans le presbytère de Finö, petite île de la côte sud-ouest de Norvège, où son père, Sören-Georg Abel, exerçait le ministère religieux.

On était en paix depuis quelques mois; mais l'enfant avait été conçu pendant la guerre : venu avant terme, il était malingre; des soins assidus le maintinrent à la vie.

Il avait un an quand son père fut appelé à l'importante cure de Gjerrestad, sur le golfe de Christiania, où s'écoulèrent quelques années heureuses. Le pasteur y recueillait l'héritage religieux de son propre père qui venait d'y mourir aimé et respecté de tous; il sut s'attirer la même confiance, et donna ses soins à toutes les fondations qui pouvaient élever le degré de civilisation et de culture chez ses concitoyens : fondations de bibliothèques, d'écoles, etc.

Quand la guerre reprit en 1807, Niels-Henrik avait cinq ans.

Son père, pendant les six années que dura le blocus, montra ce

qu'étaient son énergie et son patriotisme. Il sut o
paroissiens, soutenir leur courage, et n'abandonna pa
entreprises, suivant en cela l'exemple de ses concit
en 1810, à Christiania même, dans une ville minée
mine, fondaient une Université. A la fin de la guerre,
député au Storthing, et dans cette assemblée, comme on
les termes du compromis qui devait unir les deux natio
dinaves, il prononça ces paroles où se résument la vol
l'orgueil de ceux qu'il représentait :

« Nous sommes, grâce à Dieu, un peuple libre; ce n'est
la Suède, c'est à nous de définir les principes suivant lesqu
libre Norvégien appellera le Suédois son frère. »

Niels-Henrik grandit auprès de cet homme de bien qui
montrer autant de dévouement aux siens que d'attachement
intérêts publics.

La misère de sa famille était très grande; au début de la gue
le pasteur n'avait que deux enfants, pendant les années
famine, il lui en était né quatre autres; mal secondé par sa femm
qu'il avait aimée pour sa beauté et qui n'avait pas de caractèr
il devait, presque seul, veiller à tous les besoins.

Ses fils n'eurent pendant leur enfance d'autre maître que lu
L'enseignement qu'ils en recevaient avait son principe dans cett
parole de leur père : « Je veux que tout soit si simple qu'on
puisse le toucher comme de la main. »

Le jeune mathématicien devait retrouver, un jour, en lui-même, ce goût des raisonnements limpides. Il devait aussi connaître le prix de l'apprentissage qu'il avait fait auprès d'un homme énergique devant la pauvreté.

En 1815, il entra, ainsi que son frère aîné, à l'École cathédrale de Christiania.

Pendant les premières années passées au lycée, il nous apparaît comme un élève consciencieux et médiocre, qui n'est attiré vers aucune étude. Le séjour de l'école est d'ailleurs pénible à cet enfant malingre qui tient de sa mère un tempérament mou, une sensibilité un peu féminine : le milieu dans lequel il vit se ressent encore de la brutalité des mœurs scolaires sous l'ancien régime : les maîtres sont souvent ivrognes, la punition du fouet n'est pas abolie.

Un jour, un de ces maîtres grossiers, le professeur de Mathématiques, inflige à un élève une punition si cruelle que le patient meurt. Cet acte de barbarie marque heureusement la fin d'un état de choses qui ne peut continuer d'exister dans un pays libre, au début du XIX[e] siècle. De ce jour, l'esprit de l'enseignement est rajeuni; le professeur brutal est destitué, son remplaçant, Bernt Michael Holmboë, est un tout jeune homme; à son contact, le travail du jeune Abel va se modifier; il sera bientôt un élève remarquable.

Holmboë est, en effet, d'une génération nouvelle : il a, sur l'utilité de l'instruction, sur la manière dont elle doit être donnée, des opinions puisées dans les idées du XVIII[e] siècle. Ardent patriote, il s'est battu comme volontaire dans les armées de Norvège, et, apportant dans son enseignement la même passion qu'il avait dans la lutte, il veut être aimé de ses élèves et leur communiquer son amour pour les sciences abstraites, très négligées jusqu'alors, qu'il a charge de leur enseigner.

Niels-Henrik est séduit par cette nature; il y trouve autant

de noblesse que chez son père le pasteur Sören — de jeunesse, un plus grand abandon de soi. La qui l'attire vers son jeune maître est, réellemen fait éclater son génie.

Holmboë entre à l'École cathédrale en 1818 Abel s'attache à l'étude des Mathématiques. Il peu de temps tout ce qui forme le programm maître lui donne des leçons particulières, lui fait l d'Euler et de Lagrange. Le jeune collégien compre avec une rapidité qui émerveille son professeur. sur les bulletins de notes dès la fin de 1818 : « C remarquable » ; et, cette appellation dangereuse qua d'un cerveau en formation, il est tenté de l'accentuer suivante : « Il deviendra, s'il vit, un grand mathémati dans son enthousiasme, il avait écrit : « le plus grand mathé ticien du monde ». Il a barré ces mots, mais, sous le trait qui efface, on peut lire encore l'expression complète de ce sentimen que l'avenir devait si pleinement justifier.

Bien vite, les rapports entre les deux jeunes gens ne sont plus ceux d'un maître avec un élève ; ils deviennent des compagnons d'études. Niels-Henrik donne à son professeur, plus âgé que lui de cinq ans seulement, son doux tutoiement, qu'il donnait, disent ses contemporains, trop tôt pour les convenances, à tous ceux qui lui étaient sympathiques ; entre eux s'établissent bientôt les liens d'une amitié que chaque jour rendra plus étroite, et l'on peut croire que ce qui détermine alors le travail d'Abel est moins d'avoir trouvé un professeur intelligent que d'avoir rencontré une nature affectueuse à laquelle sa sensibilité d'enfant malade peut s'appuyer.

Dans sa vie, Holmboë est peut-être moins un premier maître qu'un premier ami; ayant vécu jusqu'alors isolé, Abel n'était attaché à aucun être, et cette solitude empêchait tout travail. « Je ne supporte pas du tout d'être seul, écrira-t-il plus tard, je deviens alors tout triste et ne suis pas dans les meilleures dispositions pour travailler. » Holmboë, mathématicien de trop peu d'envergure pour donner une direction à une intelligence infiniment plus haute que la sienne, lui donnait, par son appui, par son affection, une sorte de bien-être intérieur qui la rendait libre de se développer.

La vie de collège continua 3 ans encore, de 1818 à 1821, rendue plus douce par l'amitié d'Holmboë.

En 1820, un coup cruel vint frapper Abel : son père mourut. Cette mort était un désastre. La femme du pasteur restait sans ressources avec sept enfants, dont une fille; son fils aîné avait dû abandonner ses études et donnait déjà des signes de débilité mentale; le second, Niels-Henrik, était encore collégien. La famille se trouva réduite à la plus extrême pauvreté, ne pouvant guère compter sur la générosité des paroissiens de Gjerrestad, parmi lesquels le pasteur était devenu impopulaire. En effet, après avoir travaillé de toutes ses forces à l'établissement d'une constitution indépendante pour la Norvège, il avait tâché de limiter certaines libertés dangereuses accordées aux paysans par la nouvelle législation, et, vaincu dans cette lutte contre les désirs d'une démocratie, il était mort de douleur, conscient de l'ingratitude dont étaient payées ses peines.

Niels-Henrik perdait son seul appui naturel; mais il ne vit pas à ce moment ce que la situation des siens avait de tra-

gique. Il envisageait l'avenir avec son esprit enfantin, imaginant que ses aptitudes mathématiques tant estimées de son maître lui vaudraient bientôt un poste universitaire dont le revenu suffirait à la vie de toute la famille.

A la fin de l'année scolaire 1821, il fut reçu, sans éclat d'ailleurs, à l'examen *Artium* et entra comme étudiant à l'Université. Son état était plus précaire comme étudiant que comme interne : il était sans argent, isolé à Christiania.

Heureusement, il avait un ami dont il connut dès ce moment le dévouement actif : Holmboë sut obtenir du Conseil Académique une place pour le jeune mathématicien dans la Fondation universitaire créée à l'intention des étudiants pauvres ; il convainquit en même temps plusieurs de ses collègues de participer à une cotisation qui le libérât de tout autre souci que celui du travail.

La vie matérielle était donc assurée; vie bien misérable d'ailleurs : Niels-Henrik avait pour tout logement une chambre de la Fondation, de moitié avec un camarade. Au bout de quelques mois, il obtint d'y héberger un de ses frères cadets. Leur pauvreté était très grande; « ils ne possédaient pour eux deux, dit un contemporain, qu'une paire de draps, contraints de s'en passer quand cette unique paire était à la lessive ».

Abel ne se plaignait pas; la fierté dont il avait eu l'exemple chez son père, la confiance dans son travail, les encouragements de tous les mathématiciens avec lesquels il avait été mis en rapport, l'amitié d'Holmboë le rendaient fort devant la gêne. Il vivait au milieu de nombreux étudiants aussi peu fortunés que lui : tous, jeunes citoyens d'une nation jeune, élèves d'une Université qui n'avait pas plus de dix années d'existence, travail-

laient avec ardeur. Le soir on se retrouvait à des réunions frugales où chacun dépensait son cornet de tabac et buvait son broc de bière; on fumait, on jouait aux cartes, on contait des histoires comme savent le faire les gens du nord; Abel était gai, d'esprit inattendu, enfantin ou profond; il jouait avec passion, avec beaucoup de science d'ailleurs, et gagnait souvent quelques *skilings* que sa pauvreté ne méprisait pas.

Quand il désirait avoir une soirée plus intime, il allait chez Holmboë et, souvent aussi, depuis qu'il était étudiant, dans une maison dont la porte lui était toujours ouverte, chez le professeur Hansteen.

Celui-ci, professeur d'Astronomie à l'Université, était le mathématicien le plus érudit de Norvège; pris d'une immense admiration pour son jeune élève, il ne s'était pas lié avec lui comme l'avait fait Holmboë, car il tenait à maintenir un ton respectueux de la part de l'étudiant envers le maître; mais, quoique cérémonieux et un peu pédagogue, il se montrait paternel et accueillait avec bonté cet enfant sans famille. Aussi Abel s'était-il attaché à lui; plusieurs fois il l'était allé voir; puis, bientôt, il y était allé plus souvent, car, très vite, un charme, tout nouveau dans sa vie isolée, l'avait attiré chez son maître : c'était la douceur et la bonté séduisante de Mme Hansteen.

Auprès d'elle, il avait éprouvé un sentiment de confiance qu'il n'avait pas encore connu; être faible et expansif, mû par un besoin instinctif de s'appuyer sur une tendresse féminine, il s'était mis bientôt à aimer Mme Hansteen d'une affection d'enfant, d'une affection qui était, d'un certain côté, celle qu'il aurait eue pour sa mère, si sa mère avait été là.

Le nom de Mme Hansteen est, autant que celui de Holmboë,

lié à la vie d'Abel. Un grand nombre de ses lettres lui sont adressées; on y trouve cette affection absolument confiante d'un enfant pour sa mère et, parfois aussi, la coquetterie d'un jeune homme vis-à-vis d'une femme qu'il admire. C'est un mélange d'attachement filial et de vanité juvénile. Abel entretient son amie de ses travaux, de ses succès, de ses peines, de sa gêne, des soucis que lui donnent les siens. Parfois, dans le sentiment de ce que fut cette femme charmante pour ce génie malheureux, j'ai songé — bien qu'il n'y eût entre eux d'autres rapports que ceux d'une pure affection — à la douceur, à la tendresse maternelle et amicale que trouva dans la maison des Charmettes un autre enfant génial et malingre.

C'est chez elle que se rend Abel dans ses jours de tristesse, quand, effrayé des charges qui pèsent sur sa vie, et se renfermant en lui-même, il se sépare de ses amis et leur dit : « Je suis sombre. » C'est chez elle que, honteux comme un enfant fautif, il va, le lendemain des « parties » qu'aux jours de fête il fait avec ses camarades, « parties » bruyantes où il traîne une tenue débraillée qui lui a valu le surnom de « Nicolas le tailleur ». Mme Hansteen le réprimande, remet en ordre ses vêtements et le garde près d'elle; elle l'entretient de son travail, de l'avenir, elle tâche de donner un peu de sérieux à cet étudiant demeuré trop collégien. Car il n'a pas acquis de maturité; n'aimant que ses Mathématiques, il néglige les autres matières du programme; un jour on trouve à sa place ce billet : « Ridwald s'imagine que j'ai écrit ma composition latine, il se trompe joliment. Signé : *Abel.* » — Son amie le gronde et le convainc de s'appliquer consciencieusement à tout, afin d'assurer au plus vite son avenir matériel.

Entre ses amitiés et son travail, Abel continue son existence d'étudiant pauvre.

Au mois de juin 1822, à la fin de la première année scolaire, il est reçu à l'examen *philosophique*, c'est le second grade universitaire, le seul qu'il doive atteindre. Ce succès, comme le précédent, est assez médiocre; la note de Mathématiques tranche seule sur les autres.

Le nouveau licencié est heureux; libéré de toutes les études scolaires, il va se livrer tout entier à ses travaux favoris.

De plus en plus, les Mathématiques pouvaient seules attacher sa pensée. Il avait, dans l'espace de deux années, lu et pénétré tous les ouvrages que possédaient les diverses bibliothèques, et avait même, sur plusieurs points, acquis des vues très personnelles. Tout le monde scientifique de Christiania connaissait maintenant ses merveilleuses facultés; Holmboë et le professeur Hansteen affirmaient qu'il était déjà un mathématicien remarquable, et le professeur de Physique Rasmussen écrivait à ses collègues d'Europe que la Norvège avait vu naître un enfant dont elle serait fière un jour.

C'est qu'il n'avait pas seulement une parfaite lucidité de compréhension, il s'était attaqué lui-même à de grands problèmes. La première manifestation de son extraordinaire audace dans les recherches mathématiques remontait au printemps de 1821, époque où il n'était pas encore étudiant. Il s'était occupé de la résolution des équations, et, envisageant celles du cinquième degré, pensait en avoir trouvé la solution algébrique. C'était une entreprise ambitieuse d'aborder cette question, quand les plus grands mathématiciens avaient échoué devant elle, quand

Lagrange avait fait entrevoir que les équations de degré supérieur au quatrième ne pouvaient sans doute pas, en général, être satisfaites par une expression algébrique; mais un tel essai ne doit pas surprendre de la part d'un tout jeune homme, plein de confiance dans son intelligence mathématique, qui, rêvant sans doute d'une gloire immédiate, s'attaque à un problème dont la résolution doit le faire, d'un coup, l'égal des plus grands géomètres. Abel ne connaissait probablement pas l'étude de Lagrange; il avait rédigé son travail qui, avec l'approbation de Holmboë et de Hansteen, fut communiqué au mathématicien Degen, Norvégien établi à Copenhague.

Il est probable que les professeurs avaient eu dans la justesse du résultat plus de foi que n'en avait Abel; car, dans l'espace de temps qui s'écoula entre l'envoi du Mémoire et la réception d'une lettre de Copenhague, le jeune collégien découvrit qu'il avait fait une faute. Il fut d'ailleurs seul à s'en apercevoir. Degen, comme ses collègues de Christiania, ne sut voir si le raisonnement était ou non exact; sa réponse montrait seulement un peu de scepticisme et demandait une application numérique; elle contenait d'ailleurs nombre d'éloges pour l'auteur du Mémoire et lui conseillait « d'abandonner l'étude stérile de la résolution des équations et d'appliquer ses belles facultés à l'étude des transcendantes elliptiques créées par Legendre ». Abel ne devait pas oublier cet avis.

Nous possédons la lettre de Degen; malheureusement le premier travail du jeune mathématicien est perdu. Il nous eût donné une indication précieuse sur la formation de ce génie qui, depuis, s'appliqua tant à la rigueur.

Il n'avait pas été découragé par cet échec qui, peut-être,

lui apprit qu'il devait faire lui-même un travail de critique sévère sur ses productions. Mais il avait senti combien peu ses maîtres de Christiania étaient capables de l'aider dans ses recherches, de juger de leur valeur.

Aussi, dès sa sortie du collège, il avait caressé l'espoir de quitter pendant quelques années son pays, trop inculte, et d'aller à travers l'Europe visiter les mathématiciens. Cette pensée ne l'abandonnait plus. Il songeait avec l'ardeur d'un admirateur passionné à la joie de voir Laplace, Gauss, Poisson, ..., tous les grands hommes dont il avait lu les œuvres et qui vivaient à quelques centaines de lieues de Christiania. Quelles admirables conversations imaginait-il avoir un jour avec de si grands génies, qui comprendraient toutes les préoccupations de son esprit, et donneraient une direction à sa pensée encore flottante!

Une fois reçu à l'examen philosophique, il s'était appliqué à rédiger un gros travail qui, présenté au Conseil Académique, lui vaudrait d'obtenir les subsides nécessaires à ce voyage.

Le travail fut achevé et déposé le 23 mars 1823; le Conseil chargea Hansteen et Rasmussen de rédiger un rapport.

Ce Mémoire était « un exposé général de la possibilité d'intégrer toutes sortes de différentielles ». Ainsi nous l'apprennent les documents officiels, car l'ouvrage lui-même est perdu. Abel pensait qu'il méritait d'être imprimé aux frais de l'Université.

Il lui fallait attendre les conclusions des deux professeurs; ceux-ci tardaient à les déposer; les vacances approchaient et il était impatient de connaître le sort de cette œuvre qui devait lui valoir la liberté... Que se passait-il? Le Conseil, probablement, sachant que le rapport conclurait à une demande de bourse de voyage en faveur du mathématicien, ne voulait pas

être mis dans l'obligation de prendre une décision immédiate. Cela seul peut expliquer ce retard; Hansteen et Rasmussen devaient avoir hâte, au contraire, d'exprimer officiellement leur admiration pour leur élève; mais ils n'étaient pas libres.

Abel était si déçu que quelqu'un, Rasmussen dit-on, ému de son ennui, lui donna l'argent nécessaire pour faire, à défaut d'un grand voyage, une visite au professeur Degen, à Copenhague.

Il partit au début de juin. C'était une immense joie pour l'étudiant enthousiaste qui s'en allait chercher dans la vieille Europe des enseignements que son pays trop jeune ne pouvait lui donner, et rêvait au bonheur d'apprendre de beaux théorèmes.

Deux lettres que, de Danemark, il écrivit à Holmboë, sont les premiers documents qui fassent vivre pour nous cet enfant, très doux, très affectueux, que touchent vivement la gentillesse ou la froideur, la politesse ou la grossièreté, la grâce ou la laideur des êtres qu'il approche, qui demeure insensible aux choses si belles, si rares soient-elles, et qui, par-dessus tout, aime les recherches mathématiques avec une passion qui, si son œuvre n'était si grande, pourrait paraître puérile.

Dans la première, écrite le 15 juin 1823, il renseigne Holmboë sur les diverses personnes qu'il a rencontrées; on dirait un collégien racontant à un ancien condisciple comment sont les maîtres de sa nouvelle école. « J'ai été chez le professeur Thune, c'est un homme très aimable et bon enfant, mais, à mon avis, un peu pédant. Il m'a reçu avec une parfaite courtoisie. Aujourd'hui j'ai été chez le professeur Degen, l'homme le plus drôle que tu puisses t'imaginer, il m'a fait toutes sortes de compliments,

entre autres, qu'il aura beaucoup à apprendre de moi... Le professeur Keyser a été un garçon pas commode. Degen est marié, il a une jolie femme. Les dames, dans cette ville, sont horriblement laides, mais gentilles tout de même. »

Comme conclusion à ces observations : « Il y a ici beaucoup de fumistes. Tout y est plus mesquin qu'à Christiania. Les savants croient ici que la Norvège est un pays barbare; je fais mon possible pour les convaincre du contraire. »

Après avoir ainsi classé tous les êtres qu'il a vus, il ne s'occupe plus dans la secondre lettre que de ses études mathématiques. Comme pour marquer quel ordre de pensées l'occupe, il écrit la date sous cette forme

$$\sqrt[3]{6064321219}$$

(prends aussi des décimales).

Ce qui signifie

1823 | 8 | 4 (4 août 1823).

Il raconte qu'il a lu les *Applications de l'Analyse à la Géométrie*, de Monge, et l'*Essai sur la théorie des nombres*, de Legendre. « Ce dernier est extrêmement intéressant... Je ne peux m'empêcher de transcrire le théorème suivant qui s'y trouve et qui est, certes, le plus merveilleux des Mathématiques... ».

Ce théorème sur la théorie des nombres n'a plus rien qui nous émerveille aujourd'hui. Mais la finesse des raisonnements en cette matière séduit le jeune mathématicien, qui communique à son ami plusieurs énoncés avec la même joie qu'aurait un

numismate décrivant une précieuse médaille. Il parle aussi de ses propres travaux, de ses études d'intégration; ici se rencontre cette phrase assez mystérieuse, dont nous aurons à parler plus tard : « J'ai montré à Degen... un petit travail qui traitait, tu te le rappelles, des fonctions inverses des *Transcendantes elliptiques*. J'y avais démontré une chose impossible... mais il n'a pu découvrir aucune fausse conclusion, ni comprendre où était la faute. Dieu sait comment je m'en tirerai. »

Ces deux lettres, pleines de vie, sont fines, spirituelles dans leurs observations, joyeuses, surtout quand elles traitent des Mathématiques. Toute la correspondance d'Abel a le même caractère de jeunesse; ses lettres sont vives, écrites au courant de la plume; souvent il y mêle, laissant aller sa pensée, le récit de sa vie, les observations précises sur les personnes, avec des renseignements sur ses lectures ou ses études transcendantes. Elles nous livrent vraiment des moments de sa vie; nous sentons à travers ses phrases ce qu'il est, nous connaissons la douceur de son cœur, son affection franche pour Holmboë, sa tendresse un peu retenue pour Mme Hansteen, son attachement craintif et respectueux pour le professeur Hansteen. Nous y voyons la joie, la confiance, plus tard le désappointement, l'ennui, et toujours, dominant le tout, le bonheur du travail qui entraîne Abel loin des hommes, loin des soucis, vers le monde de pensée où doit s'écouler sa véritable existence.

A Copenhague l'étudiant est parfaitement heureux. Il vit au milieu d'une famille nombreuse, chez un oncle de sa mère, il jouit de la société d'un mathématicien très fin, Degen, et a la libre disposition d'une riche bibliothèque; son seul ennui est de se sentir loin de ses amis; encore a-t-il une impression d'eux en

yant souvent une sœur de Mme Hansteen, mariée en Danemark. Il travaille, connaît la joie des soirées de famille, va à la comédie, parfois même au bal et, ces jours-là, il s'applique à sa toilette. Une rencontre qu'il fait à une de ces soirées reviendra souvent à son souvenir : il a invité à danser une jeune fille sans beauté, mais douce et gracieuse, qui se nomme Christine Kemp; au moment où l'orchestre se met en branle, les deux jeunes gens s'aperçoivent qu'ils ne savent ni l'un ni l'autre suivre la cadence. Leur commune gaucherie est le premier lien qui les unisse. L'année suivante Abel retrouvera, en Norvège, sa danseuse maladroite; elle deviendra sa fiancée (2).

A la fin du mois d'août, il revint à Christiania. Il attendait toujours le rapport de Hansteen et de Rasmussen; ceux-ci le déposèrent au mois de décembre seulement, il ne conclurent pas à l'impression du Mémoire, cela pour des raisons budgétaires, mais proposèrent que l'Université accordât au génial étudiant une bourse de voyage.

Le Ministre ne se rangea pas à cet avis, mais offrit une subvention qui permît à Abel de continuer encore pendant deux ans à Christiania « l'étude des langues savantes et autres sciences utiles pour l'étude principale ». Cette subvention était de 200 spd (spécie daler), environ 1000fr.

Son plus cher vœu n'était donc pas exaucé, mais sa vie matérielle était assurée, sans qu'il fût obligé de recourir à la générosité de ses professeurs. Il eut un peu d'impatience à sentir qu'on voulait le contraindre à des études qui le rebutaient et, négligeant les travaux qu'on lui conseillait, continua de s'occuper de ses recherches transcendantes.

Il est assez difficile de savoir quelles furent, durant les deux années qui s'écoulèrent entre le voyage de Copenhague et le départ pour l'Europe, les idées qui se développèrent dans son intelligence. Nous possédons une foule de courts Mémoires publiés par Holmboë en 1839, qu'Abel écrivit à cette époque, mais nous ne savons ni dans quel ordre ils se succèdent, ni quelles lectures les ont suggérés.

Leur ensemble se sent de l'état d'isolement intellectuel où vit leur auteur, du peu de critique qu'il trouve auprès de lui. Certains sont de simples jeux de calcul sans profondeur; d'autres sont complètement inexacts ou foncièrement imprécis; et, au milieu de cela, il en est de très complets et même de tout à fait admirables, qui contiennent les germes de ses plus importantes découvertes. Nous donnerons à une autre place des indications sur ceux qui ont laissé une trace dans son œuvre. On verra comment, étudiant à Christiania, il a découvert son grand théorème d'addition, comment, dans un Mémoire où se trouve une généralisation du théorème d'échange entre le paramètre et l'argument, il montre déjà cette extraordinaire pénétration qui lui fait trouver le point de vue d'où la plus grande généralisation est permise. Une chose frappante est le caractère tout spéculatif de ces études; à un moment où les jeunes géomètres d'Europe s'attachent surtout à des problèmes de mécanique rationnelle, Abel, isolé à Christiania, semble s'intéresser uniquement à des recherches de Mathématique pure : théorie des équations, théorie de l'intégration, théorie des séries, des intégrales elliptiques. Mais toute cette masse de travaux nous semble un peu confuse : le mathématicien envisage de nombreuses questions, à certains moments son génie l'inspire, mais il ne sent pas l'impor-

tance de ses découvertes; le théorème d'addition n'est pas développé, le petit travail sur la fonction inverse des transcendantes hyperelliptiques semble l'expression d'une surprise, enfin, les petits travaux de calcul tiennent autant de place que des recherches qui devaient bientôt prendre un caractère fondamental. En réalité, il est permis de dire que toutes ses découvertes futures sont en puissance dans son esprit; l'intervention d'un Gauss ou d'un Cauchy lui eût vite appris quelle étude serait féconde.

L'étudiant sentait bien qu'il était égaré dans la trop grande richesse de sa curiosité; il souffrait d'être seul devant son propre travail, et cela lui faisait désirer plus ardemment de partir. Il ne pouvait imaginer alors que son destin serait de travailler toujours dans le même isolement; qu'aucun savant ne le connaîtrait, et que seuls quelques livres auraient de l'influence sur son œuvre.

Autour de lui, personne ne comprenait la forme toute particulière de son esprit. Ce n'était pas seulement le Conseil qui s'égarait, voulant le contraindre à apprendre des « langues savantes », mais ses professeurs mêmes qui le chargeaient de besognes auxquelles il ne pouvait s'appliquer.

Sa seule passion étant l'étude de pure spéculation, ce qui pouvait avoir un caractère d'application ne l'attachait pas. Il fut cependant chargé, au mois de juin 1824, de traiter, en vue de recherches expérimentales, un problème de mécanique rationnelle : il s'agissait de calculer l'action de la Lune sur le pendule. La solution devait être adressée à Shumacher, l'astronome d'Altona : Abel fit une erreur, oubliant d'introduire la composante d'attraction de la Lune sur la Terre, ce qui faussait complètement les résultats.

Cette fois encore, comme lorsqu'il avait envoyé à Degen le Mémoire sur l'équation du cinquième degré, ni Holmboë, ni Hansteen ne s'étaient aperçus de la faute; lui-même, oubliant ce travail dès qu'il le crut achevé, ne la découvrit pas. Shumacher, le premier, remarqua l'omission. C'était, pour Abel, un grave échec dans ses rapports avec un savant très estimé de toute l'Europe. Pourtant il ne sembla pas en être attristé, comme s'il sentait que ce travail n'était pas de lui, que son âme n'y avait pas pris part. Au moment où il le faisait, il était absorbé dans une autre question qui depuis longtemps lui tenait à cœur, et dans l'instant où il recevait la lettre de Schumacher, et y apprenait sa faute, il était tout à la joie d'avoir réparé sa première erreur vieille de deux années : Il venait de démontrer l'impossibilité de résoudre algébriquement l'équation du cinquième degré.

On peut penser quel prix Abel devait attacher à une si importante découverte. Très sûr de son travail, dans la crainte qu'il demeurât ignoré comme le Mémoire déposé au Conseil Académique, il décida, quoique fort pauvre, de le faire imprimer à ses frais. Il désirait répandre cette brochure, qu'il rédigea en français; elle lui servirait, pensait-il, de lettre de crédit auprès des savants qu'il allait rencontrer en Europe, durant le voyage projeté.

Dès que l'impression en fut faite, il en envoya à Degen plusieurs exemplaires, et en fit, par l'intermédiaire de Shumacher, remettre un à Gauss, la grande lumière mathématique qui, de Göttingue, rayonnait sur le monde entier.

Malheureusement, la rédaction même du Mémoire se ressentit

de l'état d'isolement où vivait Abel. Par raison d'économie il l'avait rendue extrêmement brève, et personne, à Christiania, ne sut lui dire que la démonstration devenait ainsi très obscure. Aussi, les mathématiciens dans les mains desquels elle parvint, ne la comprirent-ils pas, et Abel ne reçut pas de ces envois le résultat qu'il attendait.

Il est pourtant assez difficile d'expliquer comment Gauss demeura indifférent à cette découverte. Elle était dans un ordre d'idées qui lui était familier, et son puissant génie devait saisir ce raisonnement écourté. La tradition raconte que lorsque Shumacher lui remit le Mémoire, il dit : « Voilà encore une de ces horreurs. » La seule explication possible de ces termes est qu'il n'en regarda que le titre. Ce titre portait les mots : *Impossibilité de la résolution,* sans marquer que cette impossibilité fût limitée à la recherche d'une solution algébrique. Compris dans son sens le plus large, il était inexact, selon les idées de Gauss, lequel savait probablement déjà que l'on pouvait imaginer des fonctions particulières satisfaisant à toutes les équations. Peut-être aussi pourrait-on expliquer ces mots par le fait qu'il se publiait à chaque instant des résolutions de l'équation du cinquième degré, ou des Mémoires sur cette résolution, (comme il arrive pour une question d'aspect élémentaire, connue de tous ceux qui ont quelques notions mathématiques), et que Gauss, par principe, ne s'en occupait pas.

Abel était certain de l'excellence de son travail. Il n'avait pas besoin de l'approbation d'un autre. Et cette œuvre était, en effet, admirable. Pour nous, elle prend une importance tout autre que celle du résultat qu'elle démontre ; elle marque un moment de décision dans l'évolution du génie d'Abel. Jusque-là, il a

erré à l'aventure; il n'a envisagé aucune question dans son ensemble; il n'a fourni aucun travail complet. Ici, il a vu la solution du problème dans sa totalité; il l'a, semble-t-il, embrassée d'un seul regard; on pourrait croire qu'il en a senti, en un instant, tous les développements analytiques, comme le musicien sent dans son thème tous les développements de la symphonie. C'est là une impression qui se retrouvera souvent dans la lecture de l'œuvre d'Abel. Peut-être est-elle due seulement à notre imagination, et ne répond-elle pas à une réalité. Mais peut-être aussi est-il permis de croire que ce sentiment, peu précisé, de la certitude logique n'exige pas chez un homme de génie la même série d'arguments que chez l'esprit médiocre auquel tout a été enseigné; qu'une intelligence créatrice peut avoir, momentanément, une vue profonde, puissamment synthétique, à laquelle le développement syllogistique viendra plus tard se joindre pour la compléter.

Dans ce travail sur l'équation du cinquième degré, l'absence de tout développement inutile rend cette impression particulièrement forte. Le raisonnement se divise nettement en deux parties : l'une semble une exposition du problème, elle consiste à déterminer la forme de l'expression algébrique qui pourrait satisfaire à une équation du cinquième degré. Le résultat auquel parvient Abel est que toutes les irrationnelles qui entrent dans l'expression peuvent être exprimées en fonctions rationnelles des racines. Ce résultat amenait naturellement à l'étude suivante :

Une fois déterminé que les irrationnelles sont au plus du degré 5 et qu'elles sont égales à une fonction rationnelle des racines, il faut qu'en permutant toutes les racines, l'irrationnelle prenne toutes ses valeurs. Cette étude arrêtait sans doute le

mathématicien, avant qu'il n'ait connu le théorème de Cauchy : « Le nombre des valeurs d'une fonction rationnelle de *n* quantités ne peut s'abaisser au-dessous du plus grand nombre premier contenu dans *n* sans être 2 ou 1. » Ce théorème lui fournit immédiatement le résultat. La fonction rationnelle des cinq racines ne peut avoir que les valeurs 5 ou 2; il démontre qu'aucune de ces deux valeurs ne convient, la solution algébrique de l'équation est donc impossible. Telle est la brève analyse de ce travail très bref.

Une fois ce travail terminé, le désir de partir devint plus ardent encore. Le jeune mathématicien se sentait fort d'une œuvre excellente; il semblait imaginer que, si longtemps qu'il demeurerait encore en Norvège, il ne pourrait en fournir une autre. De plus, il avait expédié, vers la fin de l'été 1824, le Mémoire à Gauss; peut-être lui avait-on rapporté la parole du grand géomètre ; il tenait à le rencontrer, à lui prouver qu'il ne commettait pas des « horreurs ».

Bientôt, un autre mobile l'incita à faire au plus tôt ce voyage, qu'il n'imaginait pas d'abandonner. A la fin de l'été de 1824 il se fiança.

Abel avait rencontré de nouveau, durant une excursion, Christine Kemp, la jeune fille de Copenhague. Comment et pourquoi le mariage avait-il été décidé? Nous l'ignorons, ne possédant aucune des lettres qu'échangèrent les deux fiancés, ni à cette époque ni durant le voyage d'Abel.

Il ne paraît pas que Niels Henrik ait éprouvé pour sa fiancée des sentiments passionnés. Aux yeux de ce fils de pasteur, le mariage devait paraître un événement nécessaire de la vie. Pauvre, malingre, mal vêtu, d'esprit puéril, peu séduisant en

un mot, il avait subi le charme de la première femme qui l'avait remarqué. Il lui avait promis de l'épouser, et, dans sa vie malheureuse, la jeune fille tint une place qui, pour cette âme infiniment morale, devait être tenue. Dans ses lettres, quand il en parle, il l'appelle « Ma Kjeriste », et, si ce mot ne signifie pas plus que le mot fiancée, son sens littéral de « Ma cordialement aimée » a une douceur particulière d'honnêteté que n'a point notre langue. Il lui sera fidèle, même durant ses longues fiançailles; non par sentiment profond, mais par nature, par éducation. Dans une lettre de Paris, il parle des filles du Palais-Royal et dit à Holmboë : « Ma qualité de fiancé m'interdit de répondre à leur invitation. » Pureté de sentiments née d'un instinct de solidarité chez des gens qui, vivant dans un pays aride, doivent être très unis les uns aux autres, confiants, et pour cela fidèles à leurs engagements.

Abel avait décidé que son mariage aurait lieu dès que, à son retour, l'Université lui aurait (ce dont il ne doutait pas) donné une chaire. Il désirait donc revenir le plus tôt possible et partir au plus vite. L'heure fixée par le Conseil Académique n'était point arrivée, il lui fallait encore attendre plus d'un an.

La vie lui devenait assez pénible en Norvège : sa situation de fiancé prêtait à rire à ses camarades et l'empêchait de se rendre aussi souvent à leurs réunions. Il n'avait toujours comme toutes ressources que ses 200 spd annuels; la fortune, lui semblait-il, l'attendait au retour.

Aussi, dès le début de l'année 1825, fit-il démarches sur démarches pour hâter le moment de la liberté; il intéressait à son sort tous ses maîtres, si bien qu'enfin il obtint de voir réduit à un an, le séjour de deux années qu'on exigeait encore de lui, et que, par un décret du 27 août 1825, il lui fut accordé une

bourse de 600 spd (3168fr) par an, pendant une période de deux années, pour un voyage d'études à l'étranger.

Il se hâta de partir. Confiant à Mme Hansteen le soin de tous ceux qui, en Norvège, lui étaient à charge, son frère, entre autres, qui avait partagé sa chambre et pour lequel il distrayait de ses faibles subsides quelques sommes d'argent; remettant à Holmboë, ses notes, ses premiers travaux, et, emportant dans ses poches tous les exemplaires qui lui restaient du Mémoire sur l'équation, il quitta son pays natal.



CHAPITRE II.

LE VOYAGE.
(1825-1827).

Avant d'aller plus loin dans le récit de la vie d'Abel, il nous faut un instant revenir en arrière et chercher à voir, dans les travaux qu'il a exécutés jusqu'alors, quelle est la direction de sa pensée mathématique.

Le Mémoire sur l'équation est jusqu'alors le seul dont le jeune géomètre semble connaître la portée; les autres, très nombreux, dont quelques-uns ont paru dans une petite revue norvégienne, il les a laissés entre les mains d'Holmboë, comme des témoins de ce qu'a été son imagination d'étudiant. C'est à son ami (qui les publia dans les œuvres complètes en 1839), que nous devons la connaissance de ces travaux, premiers germes de théories qui rendirent illustre le nom d'Abel. Nous savons aussi, grâce aux registres de la bibliothèque universitaire, quelles furent les lectures d'Abel étudiant : les *Institutiones* d'Euler, la *Philosophie naturelle* de Newton, les Ouvrages de Mécanique d'Euler, de d'Alembert, de Lagrange, de Poisson, de Laplace, les *Disquisitiones arithmeticæ* de Gauss, enfin, le *Traité des fonctions elliptiques* de Legendre; il faut y joindre, nous l'avons vu, quelques travaux de Cauchy.

Ce qui prouve combien le génie du jeune Norvégien est per-

sonnel, c'est le peu d'influence qu'ont eu ses lectures sur l'ordre de ses préoccupations. Il nous faut faire exception pour deux auteurs : Euler et Legendre. Euler a été le premier mathématicien qu'Abel ait connu, le premier dont l'intelligence, la richesse, l'aient séduit; il se sentira longtemps de cette séduction. Pour ce qui est de Legendre, il a dû agir sur l'esprit d'Abel, par l'ordre tout spéculatif de ses travaux; le vieux géomètre français est, avec Cauchy, le seul qui à ce moment s'occupe d'autre chose que de Mécanique analytique. Degen avait montré de la pénétration, en conseillant au jeune étudiant norvégien de s'occuper des fonctions elliptiques; Abel avait suivi ce conseil, et, le travail le plus considérable, de ceux qui nous restent de sa jeunesse, concerne ces fonctions. La plus grande partie de ce Mémoire intitulé *Théorie des transcendantes elliptiques* est sans originalité; on y trouve la classification et la réduction des intégrales (3); mais il faut noter quelques points qui sont de création purement abélienne; entre autres, la recherche des fractions rationnelles $\frac{M}{N}$ telles que

$$\int \frac{M}{N} \frac{dx}{\sqrt{R}}$$

soit exprimable par une fonction logarithmique, R représentant le polynome du quatrième degré

$$R = (1 - x^2)(1 - c^2 x^2).$$

Au cours de cette recherche, Abel résout l'équation indéterminée

$$P^2 - Q^2 R = 1,$$

P et Q étant des polynomes en x.

C'est là que se représente pour la première fois cette forme

$$P^2 - Q^2 R,$$

dont la décomposition en facteurs aura une si grande importance dans l'étude des fonctions elliptiques.

Ici même la décomposition suivante

$$P^2 - Q^2 R = k(1 + nx^2)^{\mu}(1 + n_1 x^2)^{\mu'}$$

sert à résoudre le problème de la réduction des intégrales elliptiques de troisième espèce par rapport au paramètre.

Ce Mémoire, œuvre de jeunesse écrite après la lecture de Legendre, nous montre la compréhension et l'ingéniosité d'Abel; il ne nous découvre pas encore ce que cette ingéniosité a de personnel. La première affirmation de sa personnalité nous allons la trouver dans deux travaux rédigés postérieurement à celui-ci; avant d'exposer leur objet, je voudrais aussi brièvement que possible expliquer un des caractères de cette personnalité : c'est une certaine forme d'invention ou plutôt une certaine méthode d'invention, méthode instinctive, qui se manifestera plus clairement à mesure que nous avancerons dans notre étude et qui est la recherche de la *raison d'être des faits mathématiques;* Abel la formulera plusieurs fois lui-même : « J'ai trouvé, écrira-t-il de Paris, la raison pour laquelle les équations jusqu'au degré 4 sont résolubles et non pas les autres. »

Cette recherche de la *raison,* de la *cause* d'un résultat, il n'est pas un mathématicien qui ne l'ait faite; il n'en est pas un qui n'ait senti quelque différence entre la *raison rationnelle* d'un fait, c'est-à-dire la raison tenant à la nature même des choses,

et la ***raison logique,*** laquelle tient seulement à l'ordre d'un raisonnement; mais je crois bien que nul ne pourrait définir avec précision cette différence.

Pour qu'une certaine propriété A puisse être considérée comme la cause d'une propriété B, il faut, semble-t-il, que A et B satisfassent à deux conditions : 1° que le raisonnement conduisant de A à B soit simple, direct, presque intuitif; 2° que la propriété A soit susceptible d'être généralisée en A', et que A' conduise, par une marche directe, calquée sur la précédente, à un résultat B' qui soit lui-même une généralisation simple du résultat B.

On voit combien cette définition est vague, ce qu'elle comporte d'arbitraire, de vicieux même (4); le fait de considérer une certaine propriété comme la cause d'une autre est l'expression d'un sentiment personnel; il faut dire pourtant que, souvent, en ces matières, un même sentiment est général; c'est ce qui donne une certaine force à la conception de la *cause*.

Abel faisait instinctivement cette recherche de la cause, il la faisait avec un instinct sûr, avec son génie, et parvenait à des résultats infiniment généraux; nous le voyons déjà dans les deux Mémoires dont nous allons parler, et dont nous pouvons, maintenant, concevoir la genèse :

Voici deux propriétés des intégrales elliptiques : la première, c'est le théorème d'échange entre le paramètre et l'argument, il s'exprime ainsi :

$$\sqrt{R(a)}\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{R(x)}} - \sqrt{R(x)}\int\frac{da}{(a-x)\sqrt{R(a)}}$$
$$= c^2\left[\int\frac{x^2dx}{\sqrt{R(x)}}\int\frac{da}{\sqrt{R(a)}} - \int\frac{a^2da}{\sqrt{R(a)}}\int\frac{dx}{\sqrt{R(x)}}\right],$$

la seconde s'exprime [en appelant $\prod(x)$ une intégrale elliptique quelconque dont x est la limite supérieure] par l'égalité

$$\prod(x_1)+\prod(x_2)\ldots+\prod(x_n)=\prod(y)+u+\sum A\log v,$$

où y, u et v sont des fonctions algébriques de $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Ces deux propriétés étaient connues de Legendre; il est bien évident qu'elles sont logiquement contenues dans n'importe quelle définition de l'intégrale elliptique. Pour Abel, il n'en est pas tout à fait ainsi : il trouve la *raison* de la première dans le fait pour la différentielle de l'intégrale elliptique $\left(y=\frac{1}{\sqrt{R(x)}}\right)$ d'être racine de l'équation différentielle

$$2R(x)\,dy+yR'_{(x)}\,dx=0,$$

tandis que la raison de la seconde est dans le fait pour cette même fonction y d'être racine de l'équation algébrique

$$R(x)y^2-1=0.$$

Alors il peut généraliser les deux théorèmes : le premier l'est dans les deux Mémoires : *Sur une propriété remarquable d'une classe étendue de fonctions transcendantes* et *Extension de la théorie précédente* (ce sujet fut repris dans un Mémoire envoyé à l'Académie de Trontjem en 1825) ; il considère la fonction définie par l'équation différentielle

$$sy+t\frac{dy}{dx}=0,$$

et posant

$$t = \varphi(x) \qquad \text{et} \qquad y = \psi(x),$$

il parvient au résultat

$$\frac{1}{\psi(a)} \int \frac{\psi(x)\,dx}{(x-a)} - \psi(x)\varphi(x) \int \frac{da}{(a-x)\psi(a)\varphi(a)}$$
$$= \iint \frac{R\psi(x)}{\psi(a)\varphi(a)} dx\,da.$$

R étant un polynome en x et a.

Il généralise ensuite plus encore en considérant une fonction y satisfaisant à une équation différentielle linéaire quelconque, à coefficients entiers en x.

Quant au second théorème, sa généralisation est la découverte capitale d'Abel, le *Monumentum ære perennius,* comme l'appellera Legendre, le *théorème d'Abel* comme on dit aujourd'hui : Soit une fonction y définie par une équation algébrique dont les coefficients sont des polynomes en x

$$A_0 y^n + A_1 y^{n-1} + \ldots + A_n = 0,$$

considérons l'intégrale

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(x,y)\,dx \ldots,$$

$f(x,y)$ étant rationnel en x et y, on a

$$F(x_1) + F(x_2) + \ldots + F(x_n) = u + \sum A_k \log(v_k)$$

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ étant toutes les racines d'une équation de degré n déterminée d'une certaine façon, u_k et v_k étant des fonctions rationnelles des x et A_k des constantes.

Voici donc deux importantes découvertes nées de l'étude des

fonctions elliptiques par généralisation de deux formes différentes données à une même définition (5). Nous n'aurons plus guère à nous occuper de la première à laquelle Abel ne reviendra pas, bien qu'il l'ait plusieurs fois projeté. Nous devons nous arrêter à la seconde, dont nous aurons souvent à parler.

On est surpris de voir ici, ébauchée dès ces premières années de travail, une théorie qui devra révolutionner un jour l'analyse. Il semble qu'Abel s'est ouvert un immense horizon ; comment expliquer qu'il tarde à l'explorer ; nous le verrons dans un an seulement reprendre sa découverte.

C'est que, pour lui, cette découverte est loin d'avoir l'importance que — avec un recul de soixante-quinze années — nous lui voyons aujourd'hui. Son intuition géniale a été si peu préparée, si subite qu'il ne sait comment user de l'admirable instrument de recherche qu'il vient d'imaginer. Son théorème est si différent de tout ce qu'il a lu dans les ouvrages contemporains! Peut-il imaginer qu'il vient d'ouvrir une voie nouvelle aux Mathématiques par ce petit Mémoire modestement intitulé : *Sur la comparaison des transcendantes?* Est-il d'ailleurs à ce moment assez familier avec l'idée de fonction ? Sait-il même ce qu'est une intégrale prise entre des limites imaginaires? Il faut songer que, jusqu'ici, en dehors de la théorie des équations et de celle des fonctions elliptiques, il s'est occupé surtout de l'intégration des différentielles algébriques. Ce qu'il voit dans son théorème, c'est un moyen de classer des transcendantes nouvelles et irréductibles, mais — bien qu'à la fin du Mémoire il y ait une petite application aux fonctions circulaires — il ne sait probablement pas encore qu'il a le moyen d'étudier les *propriétés* des nouvelles fonctions (6).

Nous ne pouvons parler de tous ses travaux de jeunesse; mais il faudrait, pour que notre exposé fût complet, savoir quelles étaient ses connaissances sur ces deux ordres de questions : l'*Intégration* et la *fonction inverse de l'intégrale elliptique*.

Au sujet de l'intégration, nous sommes, par suite de la perte du Mémoire déposé devant le Conseil Académique, réduits à faire des hypothèses; la plus probable nous semble être qu'Abel connaissait dès 1823 le théorème suivant qui fut généralisé plus tard dans le *Précis* :

« Quand une fonction transcendante à différentielle algébrique est exprimable en fonctions algébriques et logarithmiques, on peut écrire

$$\int f(xy)\,dx = v + \alpha_1 \operatorname{Log} v_1 + \alpha_2 \operatorname{Log} v_2 + \ldots + \alpha_n \operatorname{Log} v_n,$$

$v_1, v_2, \ldots, v_n$ étant des fonctions rationnelles de x et y, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ des constantes, $f(xy)$ une fonction rationnelle en x et y (7).

Ce résultat peut aussi être considéré comme une généralisation de travaux faits sur les fonctions elliptiques.

Au sujet de la *fonction inverse de la transcendante elliptique*, nous devons aussi faire des hypothèses. Nous avons donné (page 15) le texte d'une lettre à Holmboë dans laquelle Abel parle de ces fonctions, à propos d'une conversation avec Degen. En dehors de ce texte nous connaissons un court Mémoire :

« Propriété remarquable de la fonction $y = \varphi(x)$ déterminée par l'équation

$$f(y)\,dy = dx\sqrt{(a_1 - y)(a_2 - y)\ldots(a_n - y)},$$

$f(y)$ n'étant ni nul, ni infini pour $y = a_1, a_2, \ldots, a_n$. »

Il s'agit ici de fonctions bien plus générales que les fonctions

elliptiques; aussi, me reportant aux mots « chose impossible » qui se trouvent dans la lettre d'Abel, je me rangerais volontiers à cette opinion, qu'il aurait employé le mot *elliptique* par abréviation, pour désigner une classe plus générale. Il est permis dès lors de supposer qu'il soit parvenu à un résultat impossible, étant donné qu'il n'avait certes pas encore la notion d'uniformité d'une fonction. La difficulté qu'Abel aurait rencontrée lui aurait donc masqué la valeur de la propriété de double périodicité qu'a la fonction inverse de la fonction elliptique, propriété dont il ne semble pas s'être servi avant ses travaux de Paris.

Ceci n'est qu'une hypothèse, je le répète, mais elle sera justifiée, je crois, par ce que nous verrons. Dans son Mémoire, Abel parle bien de périodicité multiple, mais cela semble seulement une notation rapide, écrite par un esprit curieux que surprend au milieu de ses recherches un résultat étrange.

Tels sont les premiers travaux d'Abel; ils portent dès cette époque l'empreinte de son admirable génie.

* * *

Abel est de taille moyenne; sur son corps grêle, la tête paraît trop lourde, le crâne est fortement développé, des cheveux longs et abondants cachent à demi son front bombé, le menton est très fin, le teint pâle et mat. Dans cette physionomie d'être malingre, une chose est charmante, ce sont de longs yeux bridés, et leur grand regard d'enfant, très doux, souvent vague et rêveur. De mise négligée, sans assurance dans l'allure, Abel s'exprime difficilement dans toute autre langue que le norvégien.

Tel est le jeune mathématicien qui part à la conquête du monde savant. C'est un bien timide conquérant! Mais il est heureux, plein d'ambition; fier de son dernier travail, il croit qu'il suffira d'en sortir de sa poche quelque exemplaire pour recevoir aussitôt un accueil enthousiaste. Il se sent fort aussi de ne pas être seul; deux camarades l'accompagnent : Boek, étudiant en médecine, et Möller, minéralogiste; en chemin, il doit retrouver deux autres compatriotes, le géologue Keilhau, l'étudiant en pharmacie Machmann. Ces cinq jeunes Norvégiens ont tous une même ambition : rapporter de la vieille Europe à leur pays une culture puissante dans les différentes branches de la Science.

Quels étaient au juste les projets d'Abel? Il avait remis au Conseil Académique un projet de voyage; ce document est perdu. Il est certain que deux buts étaient désignés : Göttingue, la patrie de Gauss, et Paris.

Abel et ses deux amis partirent à la fin de septembre et, après une traversée pénible de cinq jours, arrivèrent à Copenhague. Laissant ses compagnons continuer immédiatement leur voyage vers le sud, le jeune mathématicien s'arrêta en Danemark afin d'y revoir les gens qui l'avaient accueilli lors de son premier séjour. Le plus amical d'entre eux, le professeur Degen, était mort; mais Abel reçut un accueil cordial de la part du professeur V. Schmitten, qui lui conseilla d'aller à Berlin et d'entrer en relation avec le mathématicien Crelle, dont il vanta le savoir et la bonté.

Après un court séjour chez la sœur de Mme Hansteen, il prit le vapeur à Lubeck et rejoignit ses amis à Hambourg.

Près de là, à Altona, il devait rencontrer Shumacher. Il attendait avec impatience, de la bouche de ce savant, confirmation des paroles qu'avait dites Gauss, à propos du *Mémoire sur*

l'équation. Schumacher ne put que lui répéter sa phrase : « Voici encore une de ces horreurs. » Il ajouta, pour l'excuser, que Gauss, très chargé de travail, était peu abordable. Abel, blessé, et craignant aussi d'être mal reçu, décida de modifier son plan de voyage, de n'aller pas tout de suite à Göttingue ; il suivrait le conseil du professeur V. Schmitten et se rendrait à Berlin.

Il ne s'avouait peut-être pas un autre sentiment qui le poussait à agir ainsi. Ses deux amis Boek et Möller allaient à Berlin, Machmann y était déjà. Si Abel ne savait pas encore combien la solitude lui pèserait, il l'appréhendait déjà ; il craignait instinctivement d'être isolé dans la ville universitaire et, en donnant libre cours à ses diatribes contre Gauss, il justifiait son désir de ne pas quitter ses camarades. Il semble bien qu'il manquait ainsi aux promesses faites au Conseil Académique. Mais quoi, cette visite n'était que différée et ne lui avait-on pas dit qu'il serait fort utile à son instruction d'aller chez le mathématicien Crelle ?

Après huit jours passés partie à Hambourg, partie à Altona, les trois étudiants se mirent en route et vers le milieu de novembre ils étaient à Berlin.

Le Conseiller intime étranger, Léopold Crelle, qui tient une place si considérable dans la vie d'Abel, n'était pas un homme de génie ; mais il avait une culture puissante, une curiosité toujours en éveil et un goût passionné pour les grands esprits. Agé alors de cinquante-cinq ans, il avait vu les dernières années du siècle précédent, et nous apparaît bien comme un des derniers représentants de l'esprit encyclopédique. Sa grande capacité de travail, et surtout cette aptitude qu'il eut toute sa vie, à s'intéresser à de nouvelles études, font songer à la forme d'esprit du

Conseiller intime de Weimar. A soixante ans, quand déjà il menait de front, avec son métier d'architecte, la traduction, l'adaptation des œuvres scientifiques étrangères, la direction de sa *Revue mathématique,* il avait encore l'énergie de créer un journal de Génie civil. Dans les relations, c'était un homme infiniment aimable : « prévenant, dit Abel, sans être cuirassé de cette effroyable politesse dont se couvrent bien des gens », accueillant, ouvert, avec cette forme de bonhomie qui peut paraître à des Français un peu lourde, mais faite pour rassurer l'étudiant norvégien.

La première visite que lui fit Abel eut un début assez pénible. Crelle ne comprenait pas ce que venait faire ce jeune étranger mal vêtu, très timide, qui prononçait avec peine un allemand incorrect. Il crut, dit-on, qu'Abel, comme beaucoup de savants misérables, venait lui demander un secours.

Voici comment le jeune Norwégien racontait lui-même au professeur Hansteen cette première entrevue.

« ... J'ai été assez heureux pour faire la connaissance du Conseiller privé Crelle... Arrivé à Berlin, je me suis rendu chez lui sans perdre de temps. Ce fut long avant que je pusse lui faire comprendre le but de ma visite et le résultat semblait devoir être lamentable, lorsque je pris courage à sa question sur ce que j'avais déjà étudié en Mathématiques. Quand je lui eus cité quelques travaux des mathématiciens les plus éminents, il devint tout à fait empressé et parut vraiment enchanté... Lorsque je lui eus dit que j'avais démontré l'impossibilité de résoudre l'équation du cinquième degré, il ne voulut pas le croire et dit qu'il y ferait des objections. Je lui remis donc un exemplaire, mais il dit qu'il ne pouvait comprendre la raison de plusieurs de mes conclusions.

» ... Lorsque je lui exprimai qu'il n'existait pas ici de journal de mathématiques, il dit qu'il avait eu depuis longtemps l'intention d'entreprendre un pareil journal et qu'il n'allait par tarder à le lancer. Tout est prêt maintenant et j'en suis enchanté, car j'ai ainsi où faire paraître tel ou tel de mes petits travaux. »

La création d'une revue qui lui fût ouverte était un bonheur inespéré. Abel se mit au travail avec passion. Le 5 décembre, il écrit à Hansteen qu'il a achevé quatre Mémoires (8). Tous n'ont pas paru, et, d'ailleurs, si l'on en juge d'après ceux qui ont été publiés, ces premiers travaux sont de peu d'importance; mais il en prépare d'autres : une nouvelle rédaction du Mémoire sur l'équation qu'il doit mettre un peu plus au « goût allemand » et une étude sur les *Transcendantes elliptiques.*

Avec quelle joie il parle de son travail, des longues heures passées dans la riche bibliothèque de Crelle, des promenades avec son protecteur : « Tu peux penser, écrit-il à Holmboë, que l'on s'en donne des Mathématiques, autant que mon mauvais allemand me le permet. »

Le Conseiller intime le reçoit aussi le lundi, à ses réunions musicales. Abel aime moins ces soirées, car son oreille est peu sensible. Un jour, un pianiste dont il a regardé fixement le jeu remarque sa physionomie attentive : « Je cherchais, lui dit Abel, quelle probabilité il y avait que telle note fût touchée. » Car sa pensée est tout entière absorbée dans des recherches mathématiques; il n'y a guère que le théâtre qui puisse la distraire. Abel adore le spectacle; il y va souvent; une fois dans sa stalle, il oublie ses calculs, et, quand il retrouve ses amis, il discute avec le plus grand sérieux du mérite des acteurs.

Pendant ces premières semaines de Berlin, il est heureux, il a

des camarades, un nouvel ami; il apprend, il travaille, il s'amuse. Son avenir même semble devoir être assuré. Une chaire à l'Université de Christiania va se trouver vacante, par suite du départ du professeur Rasmussen; il est probable qu'on la réservera à l'étudiant Abel.

Pourtant, malgré cette tranquillité, certains jours, comme à Christiania, il devient sombre, et s'isolant, las de travailler, il sent que quelque chose manque à sa vie. Sa pensée va vers son amie, vers Mme Hansteen, il lui écrit son ennui, les soucis qu'il a de ses parents, de ses frères et lui fait cet aveu qu'il ne ferait pas encore à Holmboë : « J'ai parfois une terrible nostalgie. » — *Hiemwee* dit la langue norvégienne — il se rend compte de ce que ses lettres ont d'étrange par leur mélange de sérénité et de tristesse : « Ne soyez pas fâchée contre moi, écrit-il, je dois vous paraître un peu bizarre. »

Les derniers jours de l'année furent très animés. Toute la colonie norvégienne était réunie. Keilhau qui, en novembre, avait quitté ses amis pour aller faire des études de mines à Freiberg, était revenu pour fêter avec eux la Noël. Ce furent alors des parties de plaisir, des soirées bruyantes dans l'appartement qu'occupaient les cinq étudiants. On raconte que le philosophe Hégel, qui habitait au-dessous d'eux, fit demander ce qui se passait. « Ce sont de jeunes Norvégiens, lui dit-on, qui fêtent leur réunion. — Des Norvégiens, répondit le travailleur irrité, non pas, ce sont des ours russes » (*es sind russiche Bären*). Peut-être n'avait-il pas tout à fait tort? c'étaient des « ours », mais sans méchanceté, êtres gauches et mal dégrossis qui, déjà des hommes, continuaient de jouer comme des enfants.

*
* *

Le calme revint. Abel retrouva les longues journées de travail dans la bibliothèque de Crelle. La richesse de cette bibliothèque justifiait à elle seule le désir intense qu'il avait eu de venir en Europe. Il n'avait en effet trouvé chez aucun des mathématiciens de Berlin la nourriture intellectuelle, ni la critique qu'il désirait; — aucun n'avait assez de génie — mais des livres, inconnus jusqu'alors, remplissaient un peu ce double but.

Certains, sans lui ouvrir peut-être des voies nouvelles dans le domaine de l'analyse, devaient donner à sa pensée encore hésitante une forme définitive, une méthode féconde et sûre. L'un d'eux, surtout, semble, à cette époque, l'avoir profondément impressionné : c'est le *Cours d'Analyse* de Cauchy.

Jusque-là, sa culture était demeurée presque purement eulérienne : Abel était le disciple des *Institutiones;* ces œuvres si riches, puissants travaux d'approche dans le domaine de l'Analyse, avaient laissé dans le cerveau de l'étudiant la trace de leurs défauts; elles n'avaient pu lui apprendre ni la précision, ni la certitude dans la marche et dans le développement d'une théorie. D'autres ouvrages auraient pu contrebalancer cette influence : Abel admirait Lagrange si précis, si net, si *classique,* mais ne s'était pas attaché profondément à son œuvre, n'ayant probablement lu, jusqu'ici, que ceux de ses ouvrages qui traitent de la mécanique analytique; il n'aimait, nous le savons, que les sciences de pure spéculation, et, s'il est vrai que, dans ses études, sa sensibilité ait eu plus de part que sa raison logique, on peut comprendre — si l'on nous permet ce mot — qu'il n'ait pas *sympathisé* avec des

études d'un caractère trop utilitaire. Mais, en revanche, deux mathématiciens modernes devaient certainement faire sur lui une impression profonde; c'étaient Gauss et Cauchy.

On sait qu'une certaine rancune l'éloignait pour l'instant du premier, on verra qu'elle le rendait même injuste pour son œuvre; il s'assimila immédiatement la pensée du géomètre français.

Il connaissait déjà quelques ouvrages de Cauchy — le Mémoire sur l'équation du cinquième degré prouve qu'il avait lu l'étude *Sur les diverses valeurs d'une fonction de n variables* — mais il n'avait pas encore pénétré sa doctrine. Par le *Cours d'Analyse*, il entra en contact avec cette intelligence si haute, si pleine d'imagination qui, la première, présentait les théories avec précision et indiquait une marche sûre. On peut imaginer avec quel enthousiasme il lut ce livre par lequel se trouvait vraiment créée l'Analyse, c'est-à-dire la méthode analytique. Il écrira un jour que Cauchy est « l'homme qui sait le mieux comment on doit traiter les Mathématiques ». Abel exprimera ainsi avec précision ce que Cauchy a été pour lui : celui qui lui a montré à « traiter » les Mathématiques.

Ce qui a manqué jusqu'ici à son œuvre, c'est la précision et la méthode; le sentiment de cette imperfection dans ses recherches, et aussi dans la plupart des ouvrages de pure analyse publiés au siècle précédent, naît bientôt avec la lecture de Cauchy.

Il est exprimé dans le violent réquisitoire qu'Abel intercale dans une lettre à Holmboë, du 16 janvier 1826 :

« ... Les séries divergentes sont en bloc une invention du diable, et c'est une honte que l'on ose fonder sur elles la moindre démonstration. On peut en tirer tout ce qu'on veut quand on les emploie, et ce sont elles qui ont produit tant d'échecs et tant

de paradoxes. Imagine-t-on quelque chose de plus affreux que de dire que

$$0 = 1 - 2^n + 3^n - 4^n + \ldots,$$

ou n est un nombre entier positif. *Risum teneatis amici.* Je suis devenu profondément attentif à tout cela, car, si l'on excepte les cas de la plus extrême simplicité, il n'y a presque pas dans toutes les Mathématiques une seule série infinie dont la somme soit déterminée de manière rigoureuse : en d'autres termes, ce qu'il y a de plus important en Mathématiques est sans fondement. »

Bientôt sa critique devient plus profonde, il a vu quelle était la faiblesse des méthodes mathématiques, il découvre quelles sont les causes de cette faiblesse; il écrira deux mois plus tard à Hansteen :

Dresde, 29 mars 1826.

« ... La Mathématique pure, dans son sens le plus strict, doit être à l'avenir mon étude exclusive. Je veux m'appliquer de toutes mes forces à apporter un peu de clarté dans la prodigieuse obscurité que l'on trouve aujourd'hui dans l'Analyse. Elle manque à tel point de plan et d'ensemble, qu'il est vraiment merveilleux qu'elle puisse être étudiée par tant de gens, et le pis est qu'elle n'est pas traitée avec rigueur. Il n'y a que très peu de propositions dans l'Analyse supérieure, qui soient démontrées en toute rigueur. Partout on trouve la malheureuse manière de conclure du particulier au général et il est très singulier qu'avec une pareille méthode il ne se trouve, malgré tout, que peu de ce qu'on nomme *paradoxes*. Il est vraiment très intéressant d'en chercher la raison. A mon avis, cela provient de ce que les fonctions dont

l'Analyse s'est occupée jusqu'ici peuvent, la plupart, être exprimées pardes puissances. Aussitôt que d'autres interviennent, ce qui, il est vrai, n'arrive pas souvent, alors ça ne va plus, et de conclusions fausses découlent une foule de propositions incorrectes qui s'enchaînent. J'en ai examiné plusieurs et j'ai été assez heureux pour les tirer au clair. Pourvu qu'on emploie une méthode générale, ça va encore; mais j'ai dû être extrêmement circonspect, car les propositions, une fois admises sans démonstration rigoureuse (c'est-à-dire sans démonstration), se sont si fortement enracinées en moi que je suis à chaque instant exposé à m'en servir sans y regarder de plus près.... »

Ainsi, dans cet espace de trois mois, nous assistons à une transformation complète de l'esprit d'Abel. Nous l'avons vu hésitant; il est maintenant en possession d'une méthode, pour parler avec plus de précision, d'une discipline de recherches. Elle lui permettra de s'élever sans crainte jusqu'aux points de vue les plus éloignés de tout calcul concret pour descendre de là aux applications particulières. C'est dans cette méthode qu'il faut chercher l'origine de ce caractère de généralité et de puissance qui frappe dans l'étude de l'œuvre d'Abel; car on ne peut dire de cette œuvre qu'elle soit ingénieuse; les moyens employés sont toujours simples; les raisonnements ne sont pas pénétrants, comme sont les raisonnements géométriques d'un Poncelet, mais ils nous dominent par leur force, par la sûreté des déductions; ils agissent comme a pu faire la Géométrie de Descartes; les théories n'ont pas de séduction, elles ont de la grandeur. C'est ce caractère qui les rendit incompréhensibles pour les contemporains d'Abel.

La transformation qui s'est opérée dans ses conceptions, nous la rattachons à la lecture de Cauchy. Il est impossible de ne pas établir un rapprochement entre les idées qu'exprime Abel à Holmboë et à Hansteen et celles qui dominent dans le *Cours d'Analyse* qu'il vient de lire. A la vérité, le jeune mathématicien parle peu de Cauchy; il ne savait pas comment étaient nées ses nouvelles pensées. Il était parvenu à un point de connaissance tel que son esprit devait subir la première impulsion forte et précise; ses lectures ont — si l'on peut employer cette image banale mais si nette — agi sur lui comme agit le cristal sur la matière à l'état de surfusion, elles ont mis en action son énergie latente, elles ont donné une forme à son génie.

Cette transformation fut très rapide, tant l'esprit avait pris de tension par le travail intérieur de trois années. Le dernier Mémoire qu'il ait écrit est celui de Christiania (sur les équations), si général, mais en même temps imprécis et si peu fécond; nous verrons bientôt le solide Mémoire de Freiberg.

Entre les deux, pour ne parler que des plus importants, Abel a écrit la nouvelle rédaction de ce Mémoire de Christiania; elle marque bien une période de transition; la première était trop brève, celle-ci est trop lente; tous les points de la démonstration sont longuement développés, cette rédaction paraît fastidieuse, surtout après la lecture de la première sur laquelle celle-ci est calquée; elle ne donne plus ce sentiment d'une vue géniale qu'on avait eu précédemment, car l'auteur ayant senti sa faiblesse — l'imprécision — a trop craint de se laisser aller.

Abel a dû faire ce travail au début de janvier, car, lorsque, le 16, il écrit à Holmboë, il semble dire que cette rédaction est

achevée. C'est la seule où paraisse encore de l'hésitation; très vite, il doit avoir conçu la méthode qu'il exposera plus tard à Hansteen, car, dans cette même lettre, il fait part à son ami de ses projets, et ces projets sont extrêmement étendus; ses études ont déjà un caractère si général qu'on se demande comment un cerveau tout jeune ose les concevoir.

« Je me suis posé cette question : *Trouver toutes les équations que l'on peut résoudre algébriquement...* Tant que le degré de l'équation est un nombre premier, il n'y a pas trop de difficultés; mais, lorsque c'est un nombre composé, c'est le diable. J'ai appliqué aux équations du cinquième degré et j'ai heureusement résolu le problème dans ce cas. »

Plus loin, il parle d'un travail sur les séries dont il cherche à rendre la théorie rigoureuse; nous le verrons bientôt s'attaquer directement à rechercher la somme de la suite infinie

$$1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1.2}x^2 + \ldots$$

pour toutes les valeurs réelles ou imaginaires de x et de m.

Nous ne le suivrons pas immédiatement dans le développement de ces deux questions qui vont longtemps occuper sa pensée.

*
* *

Nous l'avons vu raconter à Holmboë (le 16 janvier) ses projets, ses travaux, ses réflexions sévères sur les méthodes mathématiques. A un moment, la lettre a été interrompue :

« ..... J'en étais là quand Machmann est entré, et comme, depuis longtemps, je n'avais pas reçu de lettre de chez nous, je

me suis arrêté pour m'informer s'il n'en avait pas une pour moi, mais il n'y avait rien. Par contre, il avait reçu lui-même une lettre, et, entre autres, il a raconté que toi, mon ami, tu es nommé lecteur à la place de Rasmussen. Reçois mes félicitations les plus sincères et sois assuré qu'aucun de tes amis ne s'en réjouit autant que moi. J'ai souvent souhaité un changement dans ta situation, tu peux me croire, car être professeur dans une école doit être quelque chose d'affreux pour quelqu'un comme toi qui t'intéresses tant à la Science. A présent, il va falloir que tu t'occupes de trouver une fiancée, n'est-ce pas. J'entends dire que ton frère le Doyen en a trouvé une. Je ne puis nier que cela m'a vivement frappé. Salue-le bien de ma part et félicite-le *très chaudement.* . . . .

» Et maintenant, je reviens à mon exemple..... »

Ces quelques lignes sont sans tristesse, et pourtant ce qu'Abel vient d'apprendre, c'est un premier écroulement de ses projets d'avenir. Il avait espéré remplacer Rasmussen, c'est son ami qui prend cette place. Ainsi, au moment où il entre en pleine possession de sa force, la fortune qui, déjà, fut si dure à son enfance, vient troubler le calme où pouvait vivre sa pensée. Il faut le dire tout de suite, nous verrons constamment les soucis l'assaillir dans les moments où son esprit offre les manifestations les plus hautes de sa puissance. De là vient une impression de balancement monotone entre le sentiment de sa grandeur comme mathématicien, de sa faiblesse comme homme. Notre imagination ne l'a pas créée, elle naît de la lecture de ses lettres, de l'étude de sa biographie.

Les quelques lignes écrites plus haut nous apprennent, mieux que les traditions, ce qu'est Abel : sa douceur, son honnêteté, sa

sentimentalité, la profondeur de ses affections (car il n'écrit pas un mot qui puisse attrister son ami, pas une phrase où l'on puisse lire le moindre reproche), enfin, sa passion pour le travail qui l'empêche d'arrêter longtemps sa pensée sur ses soucis.

Une autre lettre datée du même jour nous livre un autre état de son âme. Il a dû l'écrire plus tard, quand, seul, las de travailler, il sent sa tristesse revenir; ses pensées vont alors vers Mme Hansteen :

« Je vous aime tellement, chère madame Hansteen, qu'il faut au moins que je vous adresse quelques courtes lignes. Mais êtes-vous bonne aussi pour moi? J'ai si peur que vous ne le soyez pas, car je n'ai encore rien reçu de vous, ce qui me serait une si grande joie. J'ai tout de même un ferme espoir, car ma fiancée m'a écrit que vous aviez l'intention de m'écrire une petite lettre. J'ai encore une autre raison d'espérer. J'ai rêvé cette nuit que j'avais reçu une lettre de vous et je ne peux m'empêcher de croire que mon rêve se réalisera : J'étais si heureux..... »

Le sentiment qui domine est celui de la nostalgie.

« Je voudrais bien être rentré au pays. C'est si singulier de se trouver parmi les étrangers. Dieu sait comment je supporterai de me séparer de mes compatriotes, ce qui aura lieu au début du printemps. »

Ce désir de vivre dans son pays s'accroît chaque jour. Déjà il amène Abel à refuser l'offre que lui fait Crelle de demeurer à Berlin et de diriger sa Revue mathématique. Il renonce ainsi à un bel avenir, et pourtant, dans cette situation, il n'eût pas vécu isolé, car Crelle est devenu son ami.

« J'ai vraiment fait en cet homme, dit Abel, une connais-

sance tout à fait excellente..... Au fond, je suis un homme chanceux; il y a peu de gens, il est vrai, qui s'intéressent à moi, et ceux-là me sont infiniment précieux par l'extrême gentillesse qu'ils m'ont manifestée. »

Crelle est à ce point amical que, sentant combien le jeune mathématicien craint de vivre seul, il lui offre de l'accompagner à Göttingue et, s'il le peut, de le joindre à Paris.

Abel accepte. C'est un soulagement de ne plus devoir aller seul chez « l'inabordable Gauss »; car, avec le temps, ses sentiments envers le grand savant ne se sont pas adoucis; il a contre lui une certaine animosité qui ne va pas sans jalousie :

« C'est extraordinaire, écrit-il, à quel point les jeunes mathématiciens portent Gauss aux nues, pour ainsi dire. Il est pour eux la substance de toute perfection mathématique; mais s'il est, en effet, un grand génie, il est certain aussi qu'il rédige mal. Crelle dit que tout ce qu'écrit Gauss est une horreur, car c'est tellement obscur qu'il est presque impossible de le comprendre.... »

Pourtant, dans chacune de ses lettres, il a dit son intention de l'aller voir; jusque-là il manquait de courage; en compagnie de Crelle, il se sent fort et capable de l'« affronter ».

Les deux mathématiciens décident de partir ensemble au printemps; en attendant Abel, peut-être pour avoir le loisir de se livrer tout entier à ses travaux, quitte Berlin et va pour un mois chez son ami Keilhau qui, à Freiberg, poursuit ses études géologiques.

Pendant ce séjour paisible dans l'importante cité minière de l'Erzgebirge, auprès de cet ami dévoué auquel, au jour de

sa mort, il confiera sa fiancée, Abel va mettre en œuvre les matériaux qu'il a recueillis et préparés à Berlin.

A côté de la théorie des équations, dont l'étude se poursuit ainsi que le prouve l'envoi d'un énoncé à Crelle, deux importants travaux sont effectués à cette époque.

Celui qu'on appelle proprement *Mémoire de Freiberg,* et qui, probablement, fut seul rédigé chez Keilhau, est une étude qui se rattache à la théorie des transcendantes elliptiques. Abel cherche quels sont les polynomes e et R, tels que

$$\int e \frac{dx}{\sqrt{R}} = \operatorname{Log}\left(\frac{P+Q\sqrt{R}}{P-Q\sqrt{R}}\right).$$

C'est la généralisation d'une étude faite dans sa jeunesse sur le cas elliptique (R de degré 4) : on voit là un aspect de son esprit, sa manière de distinguer, ce qui, dans un raisonnement, se rapporte proprement à l'objet étudié et ce qui est généralisable; cette distinction lui est facilitée par l'heureux choix de ses notations.

Par différentiation, après comparaison des degrés, il arrive à devoir résoudre l'équation indéterminée

$$P^2 - Q^2 R = 1,$$

ce qu'il fait, comme il l'a fait déjà dans sa jeunesse, par une méthode analogue à celle qu'on rencontre dans l'analyse indéterminée numérique.

Le second Mémoire est l'étude de la série

$$1 + \frac{m}{1} x + \frac{m(m-1)}{1.2} x^2 + \ldots.$$

Cette série a pour valeur $(1+x)^m$; mais, si m n'est pas réel et entier, $(1+x)^m$ a plusieurs valeurs. Laquelle de ces valeurs est représentée par la valeur *unique* de la série? Telle est la question que se pose Abel.

Ces deux travaux sont les premiers où se manifeste la force de la discipline qu'il s'est imposée; le second surtout est l'illustration des principes exprimés dans la lettre à Hansteen : L'auteur, s'inspirant directement de Cauchy (dont, au cours de la rédaction, il citera d'ailleurs plusieurs fois le nom), détermine d'abord plusieurs critères de convergence, puis avance pas à pas vers le résultat sans laisser derrière lui un seul point incertain. Il conduit ce travail avec lenteur; il l'a commencé à Berlin, le continue à Freiberg, ne l'achèvera que dans plusieurs mois; il parlera souvent dans ses lettres, et sur un certain ton d'affection, de ce Mémoire qui, quand nous lisons son œuvre, apparaît, au milieu des autres, comme une étude d'atelier parmi des travaux d'imagination. On dirait que, par instant, le mathématicien a abandonné ses recherches nouvelles pour parfaire un détail de cette étude, comme le peintre laissant sa composition commencée s'attache, pour éprouver la fermeté de sa main, à copier le dessin d'un maître. Il semble isolé dans la chaîne que forment les recherches d'Abel; le *Mémoire de Freiberg* a le même aspect d'isolement. Cette apparence s'explique : pour l'un, le Mémoire sur le binome, par ce fait que la mort précoce d'Abel l'empêcha de publier ses autres recherches sur les séries; pour le second, par la transformation rapide des idées chez le mathématicien; il est permis de croire, en effet, que, par une méthode analogue à celle qu'il emploie dans le problème de Freiberg, il avait étudié déjà plusieurs points de la théorie des fonctions elliptiques, la trans-

formation entre autres, lorsque, plus tard, la découverte de l'inversion, ou plutôt l'usage de l'inversion lui suggéra une nouvelle méthode d'investigation.

Tandis que, dans la tranquillité de Freiberg, il se livrait avec acharnement à son travail, une fâcheuse nouvelle vint troubler sa quiétude : Crelle, retenu à Berlin, ne pouvait l'accompagner à Göttingue. Il se voyait donc contraint de faire seul ce voyage. Au même moment Keilhau quittait Freiberg pour rejoindre à Dresde Möller et Boeck avec lesquels il devait poursuivre son voyage à travers la Bohême, l'Autriche et la Suisse. Abel n'eut pas le courage de retourner à Berlin, d'y connaître dès maintenant la solitude, et, au lieu de remonter vers le nord, il accompagna son ami.

Quand il eut retrouvé ses compatriotes, il ne se sentit plus la force de les quitter. Il hésita pourtant à les suivre, à rejeter ainsi à une époque indéterminée la visite à Gauss, mais une lettre de Crelle arriva, qui justifia son désir; le conseil s'y trouvait d'aller à Vienne et de voir les mathématiciens Litrow et Burg. Abel put alors écrire à Hansteen, et, sur un ton infiniment respectueux, comme un enfant qui commet une faute, il lui expliqua qu'il partait avec ses camarades, qu'il suivait en cela l'avis de Crelle, qui ne jugeait pas nuisible à son instruction ce voyage à travers l'Europe. C'est dans cette lettre que se trouvent développées ses opinions sur les méthodes mathématiques. Constante opposition entre la force et l'autorité de son génie et la faiblesse de son caractère.

Après un séjour d'une semaine à Dresde, les quatre Norvégiens partirent vers le sud.

Nous ne dirons pas tous les détails de ce voyage durant lequel Abel vécut les mois les plus heureux peut-être de son existence. Pour en suivre les événements, il faudrait copier ici les deux lettres qu'il écrivit à Holmboë, l'une de Vienne, l'autre de Bolzen.

Ces lettres rappellent celles qu'il lui adressa lors de son premier séjour à Copenhague. Abel est encore un étudiant heureux d'être en vacances; il a, dès qu'il n'est plus attristé par la solitude, la même gaîté, la même jeunesse; et les impressions qu'il communique à ses amis reflètent une âme de petit protestant honnête et sobre, dont la sensibilité puérile et un peu lourde fait songer aux mots d'*ourson russe* prononcés par Hegel.

Avec l'âge, il n'a pas acquis des curiosités d'artiste ni d'historien : Padoue est une ville affreuse; Vérone n'a de remarquable que ses arènes « où peuvent tenir vingt mille personnes »; seule Venise inspire à Abel quelques phrases; à Prague, la vue du tombeau de Tycho-Brahé ne l'émeut pas. Peut-on penser que le souvenir d'un astronome ne saurait toucher son cœur, et que, peut-être, la tombe d'Euler lui eût paru un lieu saint?....

En revanche, il observe les gens et les juge non sans sévérité.

« Les manières sont grossières à Prague : chapeau sur la tête au théâtre et dans les restaurants, c'est très vilain.... On ne voit que d'affreuses gens, des femmes avec de grandes cruches de bière devant elles....

» Les Viennois sont extrêmement sensuels et aiment surtout à boire et à manger. L'autre jour, j'ai remarqué quelqu'un qui commençait son repas en déboutonnant son pantalon, c'est effrayant ce qu'il a englouti.

» A Venise, sur la place Saint-Marc, j'ai compté au moins vingt-cinq cafés remplis de monde..... »

Il est amusant de voir sa surprise à Vienne, à Venise devant le grand nombre d'églises « où l'on fait du catholicisme à force, sans désemparer ».

« Il est vrai, ajoute-t-il, que le service divin a bien de la grandeur, et il n'y a pas à s'étonner que la foule l'aime. »

Cette interprétation du sentiment religieux est d'accord avec le goût d'Abel pour le théâtre; car le spectacle reste toujours sa plus grande passion; il y assiste dans chacune des villes où il passe et entretient longuement son ami des pièces qu'il a vues.

Nous avons dit qu'Abel était heureux; il l'est au point que toute impression de nostalgie disparaît, que sa timidité est oubliée. De Vienne, au sujet de sa visite à Litrow, il écrit :

« Maintenant, je n'ai plus peur du tout d'accoster les gens; au commencement, cela me paraissait un peu singulier, mais, en voyageant, on acquiert la mesure d'effronterie nécessaire. »

Il ne songe plus à écrire à Mme Hansteen; il semble même négliger le travail et se laisse entraîner dans une course rapide par les amis dont il n'a pu se séparer.

En trois mois et demi, il voit avec eux Vienne, Trieste, Venise, Padoue, Vérone, Botzen. La petite troupe ne reste pas indissolublement unie pendant tout le voyage, mais Abel n'est jamais seul. Sur un livre d'auberge à Botzen, quelqu'un a trouvé la trace de ces étudiants qui, s'élevant d'eux-mêmes en grade, ont inscrit ainsi leurs noms :

KEILHAU, professore de Mineralogia,

BOECK, professore del arte veterinaria,

ABEL, professore delle Geometria.

Le séjour à Botzen, qui dura quinze jours, fut le dernier qu'ils firent ensemble. Au début de juillet, Abel partit avec Boeck, laissant dans le Tyrol Keilhau qui devait le rejoindre à Paris deux mois plus tard. A Zurich, son compatriote le quitta et il se trouva ainsi réduit à cette solitude contre laquelle il se défendait depuis un an. Mais l'impression en était cette fois moins pénible; il ne s'agissait plus d'aller « affronter » le terrible Gauss, mais d'aller à Paris.

Paris! Combien de rêves ce seul nom faisait-il naître dans l'esprit du jeune Norvégien : Paris, la Ville la plus noble et la plus intelligente du monde. Paris, le berceau des idées d'indépendance. Paris, où vivent Laplace, Cauchy, Legendre, Poisson... Paris et son Académie des Sciences qui, seule dans le monde, a le droit de sanctionner la valeur d'une intelligence!

Abel s'y rendit d'un trait depuis Zurich; oubliant la tristesse d'avoir quitté ses concitoyens, il était heureux tandis qu'il se rapprochait de la grande Ville.

Enfant génial, que sa pensée emportait toujours vers l'avenir, il ne songeait plus à toutes les causes qui avaient assombri le passé; il imaginait trouver les premières émotions de la gloire dans un pays où, par ces mêmes causes, il devait connaître des jours plus misérables que ceux de sa première jeunesse.

*
* *

Le 10 juillet, il était à Paris.

Un mois plus tard (le 12 août), il écrit à Hansteen :

« Me voici enfin dans le foyer de tous mes vœux mathématiques, à Paris... Pour me mettre mieux au français, je me

suis logé dans une famille où j'ai tout pour 120^{fr} par mois. Le mari et la femme sont très aimables et je suis bien, sauf que la chambre est très mauvaise et que je ne mange pas plus de deux fois par jour...

» J'ai été chez le directeur de l'Observatoire, M. Bouvard, et lui ai remis une Lettre de recommandation de Litrow (de Vienne). Il a été très amical... et s'est offert à me présenter aux mathématiciens les plus remarquables, quand je voudrai me rendre à l'Institut. Je n'ai pas encore profité de cette offre, parce que je veux d'abord pouvoir parler un peu français. En outre, je veux avant tout avoir achevé un Mémoire auquel je travaille et que je veux présenter à l'Institut... J'ai été chez Legendre avec mon hôte, qui est un brigand autodidacte en Mathématiques, il était sur le point de sortir en voiture, en sorte que je ne lui ai dit que quelques mots... J'ai été chez le baron Ferrussac, l'éditeur du *Bulletin*... Voilà toutes mes connaissances, mais, avant peu de temps, j'en aurai fait d'autres. Ce ne sera pas long maintenant que j'ai mis en mouvement ma langue française. »

Durant le premier mois, sa vie a donc été paisible. Paris est encore le « foyer de tous ses vœux mathématiques ». Emporté par ce sentiment enthousiaste, il n'a pu encore éprouver l'impression d'isolement que devait avoir, au milieu des Parisiens hâbleurs et vaniteux, un étranger timide, honnête et pauvre. Les circonstances lui ont d'ailleurs été jusqu'ici favorables : il a été bien accueilli par les rares personnes qu'il a vues.

Dès son arrivée, un compatriote, le peintre Göblitz, s'est occupé de lui et l'a aidé à chercher un logement. Les hôtes chez lesquels il vit sont aimables; enfin, peu de temps après son installation, son ami Keilhau est venu le rejoindre.

Il est heureux, et, n'eussions-nous la lettre où il nous le dit, nous pourrions le savoir, en voyant ce qu'il y a d'enthousiasme dans le travail qu'il commence et dont il parle à Hansteen. Ce travail qu'il destine à l'Institut est le Mémoire ***Sur une propriété générale d'un grand nombre de transcendantes***, c'est-à-dire le développement du théorème d'addition.

On peut suivre la rédaction de ce Mémoire sur le brouillon, un grand cahier où se trouvent indiquées la plupart des recherches qu'Abel effectuera pendant son séjour à Paris (9).

Nous y voyons que, le 9 août exactement (il a en haut de la première page indiqué la date), Abel se mit à l'écrire. Le même jour, il envoyait à Crelle l'énoncé de son théorème :

« Une propriété générale des fonctions dont la différentielle est algébrique est que la somme d'un nombre *quelconque* de fonctions peut être exprimée par un nombre *déterminé* des mêmes fonctions, savoir :

$$\varphi(x_1)+\varphi(x_2)+\ldots+\varphi(x_\mu)$$
$$=\nu-[\varphi(z_1)+\varphi(z_2)+\ldots+\varphi(z_n)];$$

$x_1, x_2, \ldots, x_\mu$ sont des quantités quelconques, $z_1, z_2, \ldots, z_n$ des fonctions algébriques de ces quantités, et ν une fonction algébrique et logarithmique des mêmes quantités. n est un nombre déterminé indépendant de μ. Si, par exemple, φ est une fonction elliptique, on a, comme on sait,

$$n=1.$$

Si la fonction n'est pas elliptique, on n'en connaît jusqu'à pré-

sent aucune propriété. Comme un des cas les plus remarquables, je vais rapporter le suivant :

» En désignant la fonction

$$\int \frac{(\alpha + \beta x)\,dx}{\sqrt{(a + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + a_6 x^6)}}$$

par $\varphi(x)$, on a

$$(1) \qquad \varphi(x_1) + \varphi(x_2) + \varphi(x_3) = C - [\varphi(y_1) + \varphi(y_2)],$$

où x_1, x_2, x_3 sont trois quantités variables indépendantes, C une constante et y_1, y_2 les deux racines de l'équation

$$y^2 - (\quad)y + (\quad) = 0\ (^1).$$

» Toute la théorie de la fonction φ est comprise dans l'équation (1), car la propriété exprimée par cette équation suffit, comme on peut le démontrer, pour la détermination complète de cette fonction. »

Ce théorème est identique à celui qu'Abel avait découvert étant étudiant, et qui faisait l'objet du court Mémoire *Sur la comparaison des transcendantes.* On peut croire pourtant qu'il était cette fois écrit dans un autre esprit : la différence ne consistait pas seulement dans l'emploi du mot *fonctions* en place du mot *transcendantes,* mais dans l'énoncé de l'exemple et surtout dans la phrase finale : « *La propriété* (1) *suffit à la détermination complète de la fonction.* » Cet énoncé prouve que le mathématicien avait déjà pris la question dans un sens nouveau, qu'il

(1) Nous ne transcrivons pas les coefficients qui sont des fonctions rationnelles de x_1, x_2, x_3.

avait cherché quelle importance au point de vue de la détermination de la fonction pouvait avoir ce nombre des intégrales indépendantes, c'est-à-dire le nombre qu'on appellera, à quelques différences près, plus tard, le *genre* de la fonction.

Au moment où il écrit à Crelle, Abel a sans doute l'intention de faire rentrer dans le cadre de son Mémoire des développements se rapportant à cet exemple; mais, cette fois déjà, comme il lui arrivera souvent dans la suite, soit qu'il ne se sente pas assez maître de la question, soit qu'il conçoive des développements trop considérables, il sera conduit à remettre à une époque postérieure la rédaction de cette étude.

Nous ne pouvons sur ce point que faire une hypothèse, car tout le travail antérieur qui a trait au théorème d'addition nous demeure absolument mystérieux. Nous ne pouvons savoir ni comment Abel le découvrit, ni dans quel sens il avait l'intention d'en user lorsque, trois mois avant sa mort, il en communiquait encore une fois l'énoncé à Crelle; nous ne sentons pas nettement d'époque transitoire entre le Mémoire *Comparaison* et le *Mémoire de Paris*. Comment expliquer que cette importante propriété n'ait pas été utilisée dans le Mémoire de Freiberg? Comment se fait-il que, de Paris seulement, Abel en communique l'énoncé à Crelle? Comment comprendre enfin que, dans ses lettres à Holmboë, Abel ne dise pas à son ami qu'il a développé un Mémoire dont la première ébauche est demeurée à Christiania entre les mains dudit Holmboë?

A cette dernière question, on pourrait répondre que le mathématicien ne parle pas en détail de ses travaux, qu'il ne renseigne ses premiers maîtres que sur ceux dont il s'occupe au moment où il leur écrit; mais, justement, dans une lettre à Holmboë et

plus tard dans une lettre à Hansteen, il parle de ce Mémoire sans dire quel en est le sujet, sans même le rappeler.

Aussi, pour mettre d'accord ces diverses observations, pourrait-on penser qu'Abel avait en quelque sorte oublié sa première étude, qu'il n'en avait pas parlé à Crelle, et que, plus tard, il avait en réalité découvert une seconde fois le théorème d'addition.

Cette hypothèse n'a, me semble-t-il, rien d'absurde. Si on lit la correspondance d'Abel, on ne rencontre dans ses Lettres si pleines de franchise, (sauf quelques passages sentimentaux dans les lettres à M[me] Hansteen) pas de phrases qui évoquent des moments de la vie de jeunesse ou des travaux déjà effectués. On pourrait même, si l'on ne cherchait plus loin, croire que, sensible et malheureux, Abel a peur d'évoquer quelque chose de son passé. Ce n'est point cela; sa vie intérieure est si intense, le travail de sa pensée si rapide qu'il n'a pour ainsi dire pas le temps de prendre conscience de sa mémoire. Il vit dans le présent, c'est-à-dire qu'il se laisse entraîner toujours vers l'avenir; ce qu'il a vu, ce qu'il a appris, ce qu'il a découvert est bien inscrit dans sa mémoire, mais, lorsque, à un moment, cette empreinte se manifeste, il n'a pas conscience que ce soit un souvenir. On peut croire que ce qu'il a acquis en Mathématique est rentré aussitôt dans la catégorie de ses instincts et que les choses déjà rencontrées peuvent, sous certaines influences, imprimer à sa pensée un certain mouvement dont il ne détermine pas les causes et dont on pourrait dire qu'il est un *réflexe*.

Il est donç permis de supposer que, par un processus de cet ordre, il avait été, au cours de ses études sur l'intégration, conduit à découvrir de nouveau le théorème d'addition et que ce

qu'il communiquait à Crelle était la base d'une théor
Imaginée par un esprit dont nous avons vu depu
mois le progrès constant, cette théorie devait être p
et prendre même des racines si fortes que bientôt -
blement plus encore si Abel avait vécu — les plus i
de ses recherches postérieures devaient s'y rattacher.

Quand, le 9 août, Abel entreprend la rédaction, il
ment depuis quelque temps en possession des résult
exposer : trois jours après, le 12, il écrit à Hansteen
bien réussi dans ce Mémoire qui contient beaucou
nouvelles et mérite, je crois, d'être remarqué », et so
nous indique que, le 17, la partie la plus importa
minée ; l'auteur a démontré le théorème, déterminé la
fonction algébro-logarithmique et vérifié si la cou
ne doit pas avoir de point de rencontre invariable av
fixe. (Nous employons ici le mot *courbe* pour simp
gage, mais il faut bien remarquer qu'Abel ne l'empl
son esprit purement algébriste le porte à considére
tions indépendamment de toute représentation.) (
tion faite au brouillon est fort intéressante à suivre
est écrit sous une forme presque définitive, mais
travail avance, certaines manières de voir ont dû se t
ou bien Abel a reconnu quelques erreurs; dans c
sans rien effacer de ce qui est écrit, il a indiqué d
point à modifier et continué le travail comme si l
tion était faite. Dans d'autres cas, il a refait de no
une partie de l'ouvrage, mais sans toucher à ce qu
demment écrit. Il n'a pas poursuivi jusqu'au bout
littéral; quand il s'est senti bien maître du dévelo

s'est borné à inscrire des formules qui lui serviront de repères pour le travail définitif de rédaction. On ne trouve, dans cette création, ni hésitation, ni retour en arrière; elle va droit devant elle; il semble que ce travail a été fait dans des moments d'inspiration.

La rédaction définitive fut divisée en dix paragraphes. Elle contenait, outre la démonstration du théorème et la détermination de la fonction algébro-logarithmique, le calcul du nombre des intégrales indépendantes, puis l'application de la théorie aux fonctions dont la différentielle porte sur un radical. On peut voir, sur le brouillon, qu'Abel avait eu un moment la pensée d'introduire un onzième paragraphe traitant du théorème d'échange entre le paramètre et l'argument, sujet déjà étudié autrefois, mais qu'il n'avait pas persisté (10).

*
* *

Commencé le 9 août, le Mémoire était terminé à la fin d'octobre et remis aussitôt à l'Institut. Ainsi nous l'apprend une lettre à Holmboë (24 octobre). Abel avait mis deux mois à achever ce travail dont la première partie, la plus importante, avait été écrite en huit jours. Quelle raison avait pu retarder ainsi l'achèvement de cette rédaction?

La raison? Il faut la chercher dans le changement profond qui, pendant ces deux mois, s'est effectué dans la situation matérielle, et surtout dans l'état mental d'Abel. Quand il a commencé, au mois d'août, à écrire son Mémoire, il se sentait heureux; après l'arrivée de Keilhau, il avait, auprès de son ami, retrouvé cette impression de sérénité qu'il avait eue à Freiberg; comme à Freiberg, il avait travaillé en paix. Mais bientôt les ennuis

étaient venus : les soucis oubliés, soucis de famille, soucis d'a nir, avaient troublé sa quiétude; vers la mi-octobre, Keilhau ét parti. Abel était alors demeuré seul, ce qui le rendait impro au travail.

Sa tristesse, nous en trouvons l'écho dans sa lettre du 24 octo à Holmboë.

« Mon ami, écrit-il, envoie-moi quelques mots qui me cc solent et me réconfortent dans ma solitude, car, bien que je s dans la ville la plus bruyante du continent, je suis comme da un désert. »

Il est seul, en effet; après trois mois de séjour à Paris, il n'a se créer aucune relation. Devant les Français, il a retrouvé timidité que, quelques mois auparavant, il croyait avoir défi tivement surmontée; il se sent alors pour eux une certaine an pathie qui n'est pas exempte de rancune.

« Je n'aime pas autant le Français que l'Allemand : le Franç est extrêmement réservé à l'égard des étrangers; il est très di cile d'arriver à des relations intimes avec lui, et je n'ose espé y parvenir. Chacun travaille à part sans s'occuper des autr Tous veulent instruire et personne ne veut apprendre. L'égoïs le plus absolu règne partout. La seule chose que le Franç recherche chez les étrangers, c'est le côté pratique; personne sait penser que lui. Il est le seul qui sache produire quelq chose de théorique. Telles sont ses idées, et, dès lors, tu pe comprendre combien il est difficile d'attirer l'attention, surtc pour un débutant. » (11).

Il a pourtant encore une certaine gaîté; on trouve dans ce lettre les mêmes notations rapides et précises qu'il écriv durant son voyage :

« Legendre est un homme extrêmement aimable, mais malheureusement vieux comme les pierres... Cauchy est fou et il n'y a rien à faire avec lui, bien qu'il soit le mathématicien qui sache le mieux comment on doit traiter les Mathématiques... Laplace a l'air alerte et petit, mais il a le défaut que le diable boiteux reproche à Zambullo, c'est-à-dire la mauvaise habitude de couper la langue aux gens... Poisson est un petit homme avec un joli petit ventre. Il porte son corps avec dignité. De même Fourier. Lacroix est effroyablement chauve et remarquablement vieux... » (12).

A ce moment, Abel compte encore entrer en relations avec ces savants; il a rencontré déjà Legendre et, présenté à Cauchy, il a tenté de l'intéresser à son Mémoire, mais n'y est pas parvenu. C'est Hachette qui doit mettre le jeune mathématicien en relation avec ses collègues.

Mais, à voir les lettres postérieures, il ne semble pas que ces présentations — en supposant qu'elle aient été faites — aient eu quelque effet, et, jusqu'à la fin de son séjour à Paris, Abel vivra seul, loin de toute société scientifique. En dehors de cette société qu'il désirerait, il n'en a pas qui soit de pure camaraderie; parfois des Norvégiens de passage, et de temps en temps le peintre Göblitz; mais cette dernière relation — à laquelle nous devons cet objet d'un prix inestimable qu'est le portrait d'Abel — n'a jamais eu le caractère d'une amitié. Quant à ses hôtes, M. de Cotte et sa femme, qui lui semblaient autrefois agréables, voici le jugement qu'Abel porte maintenant sur eux :

« Le mari est un peu mathématicien, mais très bête, la femme très brouillonne, de 35 ans et plus. On parle toujours à table, par équivoque, sur les secrets du ménage... Parler de pots de

chambre, etc. est parmi les choses les plus convena

A la fin de la lettre, on retrouve le même sentimen
début :

« Je suis maintenant absolument seul, Keilhau éta
le 16. »

Le dé,art de son ami ramène sa pensée sur ceux qu'il
en Norvège; voici ce qu'il écrit à sa sœur :

« Keilhau part pour rentrer au pays, et je ne veux pas
cette occasion pour t'écrire quelques lignes. Je pense trè
à toi, ma chère sœur.... Où est [1]... Vit-il, et com
suis très inquiet de lui. Lorsque je suis parti, les
s'annonçaient pas bien pour lui. Dieu sait combien sc
été triste à cause de lui. Il n'a sans doute pas beaucou
tion pour moi; et cela me fait beaucoup de peine,
jamais fait volontairement, rien qui puisse lui déplai
Élisabeth, écris-moi tout au long sur lui, sur ma mè
frères. Ici, à Paris, ma vie est assez agréable...
même, je voudrais rentrer au pays, partir aujourd'h
possible... »

A ces sujets de tristesse, un autre plus grave vie
c'est le manque d'argent. Abel a dépensé sans comp
à Boeck et à Keilhau; très pauvre, il est mainten
veiller à la moindre dépense. Bientôt, il devra
bourse de son ami Holmboë, afin d'avoir de quoi pa
avant de retourner en Norvège. Il fera une dema
et, ne recevant pas de réponse, il s'irritera.

Ces difficultés d'argent, ces soucis de famille

(1) Illisible, il s'agit probablement de son frère.

songer plus sérieusement à l'avenir. Dans cet avenir, pas une perspective sur laquelle reposer sa pensée. L'Université de Christiania ne promet toujours rien; et voilà que, maintenant, Crelle ne peut persister dans son offre, avant d'avoir obtenu du Gouvernement une subvention pour le Journal. Abel aurait pu, depuis longtemps, appréhender ces ennuis; mais jusque-là, vivant toujours entre ses camarades, dans une atmosphère de jeunesse, il ne les avait jamais considérés avec gravité. En peu de temps, par suite de sa désillusion à se trouver si étranger, si seul, dans le « foyer de ses vœux mathématiques », son esprit a pris plus de maturité; avec ce même esprit qui juge l'orgueil des Français dans un sentiment de la réalité qu'il n'avait pas autrefois, il envisage avec plus de netteté sa situation. Sa tristesse est alors plus continue; à certains moments, elle lui donne même de l'aigreur, ce qu'il n'avait jamais eu.

« . . . Les Mathématiques, écrit-il, subissent un vilain recul en France. Les jésuites veulent gouverner et les journaux sont remplis de polémiques à leur sujet, c'est une vermine du diable... »

C'est le jeune protestant dépité, trouvant dans les gazettes libérales un écho à son ennui, un prétexte à le tourner en irritation. Cette aigreur est bien puérile, bien illogique.

« Cauchy, écrit-il, est extrêmement catholique et bigot, chose bien étrange chez un mathématicien... » Et il a dit plusieurs fois : « Cauchy est l'homme qui sait le mieux comment on doit traiter les Mathématiques. » Il est vrai que ledit Cauchy a à peine jeté les yeux sur le travail présenté par le jeune mathématicien. De telles inconséquences aident à comprendre ce qu'est un moment de la vie d'Abel.

Cette vie est infiniment triste. Dans cette même let
24 octobre, il la résume ainsi :

« Je travaille, je mange, je bois, je dors et je vais parfoi
comédie. C'est, de tout ce qu'on appelle plaisir, le seul q
m'accorde, mais c'en est un grand... »

Pendant les deux derniers mois de l'année 1826, Abel dem
à Paris, dans le même isolement.

De son Mémoire déposé à l'Institut, il ne sait rien depu
jour où Cauchy a été chargé d'en faire un rapport. Il trava
tâche de se faire connaître, collabore au *Bulletin de Ferru*
(où il publie un résumé de son *théorème sur l'Équation p*
dans le *Journal de Crelle*), envoye un Mémoire au *Journal*
Gergone, avec l'intention d'en envoyer d'autres.

Il faut l'imaginer alors, lui, si confiant, si enthousiaste
travail, si assoiffé d'amitié, vivant maintenant, seul, pauv
inconnu, dans la grande ville de Paris, avec, pour toute sociét
un ménage de gens stupides et grossiers.

Tout le jour, il travaille dans sa petite chambre du faubour
Saint-Germain ; puis, quand il est las, quand des pensées sombre
reviennent à son esprit, il erre dans Paris, de préférence dans les
alléesdu Luxembourg, ou, le soir, sous les galeries du Palais-Royal.
Il parle avec une certaine sympathie de « ce lieu de perdition » ;
sa sensibilité si honnête ne s'effarouche pas d'y rencontrer des
femmes de mœurs faciles ; il les considère sans sévérité ; peut-
être, dans son désir d'entendre des paroles affectueuses, a-t-il, en
les entendant, oublié quel but avait leur gentillesse...

« Elles ne sont, écrit-il, nullement indiscrètes. Tout ce qu'on
entend, c'est : « Voulez-vous monter avec moi, mon petit ami,
petit méchant. » Naturellement, en ma qualité de fiancé, je ne

les écoute pas, et je quitte le Palais-Royal sans aucune tentation. »

Seul et triste, Abel ne trouve pas un endroit — sauf parfois une stalle au spectacle — où reposer sa pensée fatiguée. Son seul refuge est le travail même. Encore ce travail n'est-il plus ce qu'il était deux mois plus tôt : Abel ne pourrait aujourd'hui, comme il le fit à Freiberg, comme il le fit au début du séjour à Paris, s'astreindre à la rédaction de ses découvertes. Depuis le milieu d'octobre jusqu'à la fin de décembre, il manifeste souvent l'intention de mettre en ordre ses recherches, mais il ne peut le faire; et, sauf de courts mémoires envoyés à des périodiques français, il n'écrit plus rien.

Pour rédiger, il lui faudrait, par un mouvement d'énergie, revenir en arrière sur ses pensées, c'est-à-dire sur lui-même, et il n'en a pas la force. Aussi, laisse-t-il son esprit aller, toujours plus avant, vers des recherches nouvelles; et, certainement alors, pendant ces heures de création, il oublie quelle est sa misère.

Pour nous, si nous pouvons comprendre ce qu'est sa tristesse, sommes-nous capables d'imaginer la joie qui le saisit dans les moments où il se sent maître d'une vérité nouvelle, ces moments où — selon une forte expression de Balzac — l'âme semble s'être débarrassée des liens de la chair et se trouver comme rendue au monde d'où elle vient. De tels moments doivent compenser toutes les heures pénibles.

Puissions-nous trouver quelque consolation, au milieu de la vie d'Abel, à songer au bonheur qu'il connut quand, à Paris, il découvrit les deux théories dont nous allons chercher la genèse, la théorie des équations Abélienne et celle de la fonction inverse de l'intégrale elliptique.

* * *

Il est difficile de déterminer quelles étaient avant le mois d'octobre 1826 les connaissances d'Abel sur ces deux sujets. Les conceptions du mathématicien étaient formées bien longtemps avant qu'il se mît au travail la plume à la main; dans ses études, la part des calculs est faible et l'on peut parfaitement imaginer que ces Mémoires, dont les notations et les développements sont simples, aient été faits entièrement de tête. Pourtant, en nous guidant sur quelques Lettres et sur le cahier de brouillon de Paris, nous tâcherons de faire, sur l'ordre suivant lequel se suivirent ses découvertes, une hypothèse probable.

Nous savons qu'Abel était depuis plusieurs années occupé des fonctions elliptiques; il parle, dans une Lettre datée de Vienne, de rédiger un Ouvrage sur ces fonctions. Que devait contenir cet Ouvrage? Rien ne nous renseigne là-dessus. Le seul document que nous possédions sur l'étude des fonctions elliptiques, antérieurement au travail dont nous allons parler, est un fragment du cahier de brouillon de Paris. Ce fragment — postérieur au Mémoire de l'Institut — traite de la « transformation » des intégrales elliptiques : Abel cherche la forme d'une fonction transformatrice non rationnelle $y = \sqrt{\frac{P(x)}{Q(x)}}$; il vérifie que cette recherche se ramène à la recherche d'une fonction transformatrice rationnelle. Il connaissait donc les transformations rationnelles. Avait-il, dans les recherches sur celle-ci, usé de l'inversion? Cela est possible, mais il semble plus simple de penser qu'il les avait faites

par un processus analogue à celui du problème de Freiberg, processus qui devait le conduire sûrement à une solution complète.

Nous avons plus de renseignements touchant les études sur la théorie des équations. Abel tient en effet ses correspondants au courant de ses travaux sur ce sujet. De Berlin, il a écrit à Holmboë (Lettres du 16 janvier 1826, *voir* p. 40) qu'il s'était posé le problème suivant : « Trouver toutes les équations résolubles algébriquement » et qu'il l'avait résolu pour le cinquième degré. Plus tard, de Freiberg (14 mars 1826), il a communiqué à Crelle cet énoncé :

« Si une équation du cinquième degré dont les coefficients *sont des nombres rationnels* est résoluble algébriquement, on peut donner aux racines la forme suivante :

$$x = c + \mathrm{A}\, a^{\frac{1}{5}} a_1^{\frac{2}{5}} a_2^{\frac{4}{5}} a_3^{\frac{3}{5}} + \mathrm{A}_1 a_1^{\frac{1}{5}} a_2^{\frac{2}{5}} a_3^{\frac{4}{5}} a^{\frac{3}{5}}$$
$$+ \mathrm{A}_2 a_2^{\frac{1}{5}} a_3^{\frac{2}{5}} a^{\frac{4}{5}} a_1^{\frac{3}{5}} + \mathrm{A}_3 a_3^{\frac{1}{5}} a^{\frac{2}{5}} a_1^{\frac{4}{5}} a_2^{\frac{3}{5}}. \text{»}$$

Il donne la forme de a, a_1, a_2, a_3 qui ne dépendent que de radicaux carrés; les A, A_1, A_2, A_3 sont des fonctions linéaires de a_1, a_2, a_3, a.

Il ajoute :

« J'ai trouvé de pareils théorèmes pour les équations de degré 7, 11, 13, etc. »

Comment Abel est-il parvenu à ce beau résultat?

Par une méthode analytique probablement, méthode qui se rapprocherait peut-être de celle employée par Van der Vals dans la même recherche. (Il faut remarquer qu'il avait obtenu déjà dans cet énoncé un résultat très remarquable; il avait même fait

une découverte qui fut mise au jour, quarante ans plus tard, par Kronecker, celle de la forme des racines des équations abéliennes d'un seul cycle de racine. S'il avait assez vécu pour achever son dernier Mémoire sur ces équations, Abel fût, sans aucun doute, parvenu de nouveau à cette forme des racines. Pourrait-on dire pourtant, avec vérité, que depuis l'année 1826 elle était découverte ?)

Il est à noter que, jusque-là, il ne s'est occupé que des équations numériques à coefficients entiers. Bientôt, la généralité de ses recherches s'accroît et il imagine les équations rationnelles dans un domaine quelconque de rationalité.

Les documents que l'on trouve après la lettre adressée à Crelle sont la lettre écrite à Holmboë, de Paris, le 24 octobre 1826, et un fragment considérable du cahier de brouillon.

Dans ce fragment, on voit que le problème général est posé; Abel use de la quantité algébrique que l'on a nommée « résolvante de Galois » (et qu'on devrait appeler peut-être « résolvante de Lagrange »).

Il semble, d'après ce fragment, qu'il ait été dès ce moment en possession du résultat suivant : que les équations de degré non premier, résolubles algébriquement, sont décomposables en équations de degré moindre; mais tout ce passage est d'ailleurs d'une lecture trop difficile pour qu'on en puisse, avec certitude, tirer une conclusion.

Dans la lettre à Holmboë, qui est de la même époque que ce brouillon, Abel s'exprime ainsi :

« Ce qui m'occupe pour le moment c'est la théorie des équations, mon thème favori, et me voilà déjà assez avancé pour trouver le moyen de résoudre le problème général que voici :

Déterminer la forme de toutes les équations algébriques qui sont résolubles algébriquement. J'en ai rencontré un grand nombre du cinquième, sixième, septième degré, qu'on n'a pas flairé jusqu'à présent. J'ai en même temps la solution la plus directe des équations des quatre premiers degrés, avec la preuve la plus évidente pourquoi celles-ci sont résolubles et non pas les autres. Quant à l'équation du cinquième degré, j'ai trouvé que, quand une telle équation est résoluble algébriquement, il faut que la racine ait la forme suivante :

$$x = A + \sqrt[5]{R} + \sqrt[5]{R'} + \sqrt[5]{R''} + \sqrt[5]{R'''},$$

où R, R′, R″, R‴ sont les quatre racines d'une équation du quatrième degré résoluble par des racines carrées seulement. »

On voit combien cette forme donnée aux racines de l'équation du cinquième degré est plus féconde que celle qu'il a indiquée à Crelle. C'est une forme semblable que l'on peut donner aux racines des équations du troisième et du quatrième degré (formules de Cardan pour le troisième, de Lagrange pour le quatrième), et Abel a sans doute démontré que les racines des équations des quatre premiers degrés pouvaient seules prendre toujours une telle forme.

Cette recherche de la cause « pour laquelle les équations des quatre premiers degrés étaient résolubles et non pas d'autres », nous semble être le renseignement le plus caractéristique que nous trouvions dans ce fragment de lettre. Il était bien dans l'esprit d'Abel de chercher pour quelle raison certaines classes d'équations étaient résolubles; ayant découvert cette raison pour les équations des quatre premiers degrés, il était tout naturellement amené à la chercher pour une autre classe connue d'équa-

tions résolubles, pour les équations binomes. Cette recherche devait le conduire à étudier de nouveau Gauss, Gauss dont l'œuvre lui avait été jusqu'alors si antipathique. C'est ce qu'il fit à Paris; il écrit en effet à Holmboë, en décembre 1826, à propos de la division de la lemniscate :

« Cela m'a fait pénétrer en même temps le mystère qui a enveloppé les théories de M. Gauss sur la division de la circonférence du cercle, je vois clair comme le jour comment il y est parvenu. »

Qu'il ait réellement relu les *Disquisitiones* à ce moment, il est impossible de le savoir, mais il est certain qu'à ce moment seulement il les a comprises de la façon dont il voulait comprendre; et il semble bien probable que, de sa compréhension de la division du cercle, est sortie la théorie des équations abéliennes.

Les équations abéliennes sont telles que toutes les racines sont fonctions rationnelles de l'une d'elles. Les équations de Gauss jouissent de cette propriété; en effet, si g est une racine primitive pour le module p, les racines d'une équation binome de degré premier p peuvent être représentées par les quantités

$$\omega, \quad \omega^{g}, \quad \omega^{g^2}, \quad \ldots, \quad \omega^{g^{p-2}}$$

ou, en posant

$$\theta(\omega) = \omega^{g},$$

par

$$\omega, \quad \theta(\omega), \quad \theta^2(\omega), \quad \ldots, \quad \theta^{p-2}(\omega).$$

Ce qu'Abel remarqua, c'est que la résolution ne dépendait pas de cette forme particulière de la fonction $\theta(\omega)$; cela était assez heureusement montré par la rédaction même de Gauss qui, pour

des raisons de typographie, avait été obligé de prendre une notation analogue à $\theta(\omega)$. La plupart des résultats étaient vrais, en ne supposant sur cette fonction $\theta(\omega)$ nulle autre propriété que d'être rationnelle.

On peut penser que c'est ce point auquel Abel donnait le nom de « Mystère », et ce qu'il y avait d'admirable dans la découverte de ce « mystère », c'était le fait d'être conduit à considérer les équations non plus d'après leur degré, ni d'après leur forme, ni d'après la forme de l'expression des racines, mais *d'après les relations que pouvaient avoir entre elles diverses racines;* une voie nouvelle était ouverte dans l'étude des équations. Abel se proposa alors de résoudre celles dont les racines étaient fonction rationnelle de l'une d'elles et, pour le faire, il n'avait qu'à suivre exactement la méthode de Gauss.

Il traitait ainsi le cas d'équations cycliques, c'est-à-dire d'équations dont les racines étaient de la forme

$$\omega,\quad \theta(\omega),\quad \theta[\theta(\omega)],\quad \theta\{\theta[\theta(\omega)]\},$$

qu'il écrivait :

$$\omega,\quad \theta(\omega),\quad \theta^2\omega,\quad \ldots.$$

Naturellement amené à étudier le cas où, ω étant une racine, deux autres racines eussent pour expression deux fonctions différentes de ω

$$\omega_1 = \theta_1(\omega),\qquad \omega_2 = \theta_2(\omega),$$

il s'aperçut que la solution était à peine modifiée, à condition que les fonctions $\theta_1(\omega)$, $\theta_2(\omega)$ pussent être interverties, c'est-à-dire que l'on eût

$$\theta_1[\theta_2(\omega)] = \theta_2[\theta_1(\omega)].$$

C'est ce qui arrivait dans la division du cercle.

Tels sont les résultats; les calculs d'Abel sont notés sur le cahier de brouillon de Paris (à la suite du fragment sur la transformation des intégrales elliptiques dont il est question plus haut). Cette théorie n'était pas encore parfaite, et, en effet, à une époque bien postérieure, un an plus tard, on trouve notée, sur un autre cahier, une conclusion erronée, ou plutôt incomplète, touchant les équations abéliennes. Au point où elles étaient, ces études allaient lui permettre d'entrer de plein pied dans une étude particulière, celle de la division de l'arc de lemniscate.

L'idée de résoudre les équations de division de l'arc de lemniscate est sans doute née d'un souvenir des *Disquisitiones.*

Gauss avait écrit en préambule avant d'aborder la division du cercle que la méthode dont il allait parler pouvait s'appliquer à résoudre la division de l'arc de courbe représenté par l'équation

$$ds = \frac{dx}{\sqrt{1 - x^4}}.$$

Cette équation est celle de lemniscate.

Abel, se trouvant en présence de cette équation, dut avoir la pensée de faire la même opération que l'on fait sur l'arc de cercle, opération qui revient, considérant le sinus au lieu de l'arc sinus, à inverser l'intégrale

$$s = \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Ainsi, il était conduit à considérer la fonction inverse d'une

intégrale elliptique particulière, et l'on peut croire que ses premiers travaux complets sur l'inversion furent l'étude de la division de cette fonction.

Connaissant la double périodicité, il lui fut facile de former l'équation de division; il suffisait maintenant de chercher s'il y avait entre les racines la même relation qu'entre celles de l'équation de division du cercle.

Comment s'y prit-il pour découvrir cette relation? Rien ne nous l'indique; le cahier de brouillon ne contient aucun calcul à ce sujet. Il est peu probable que la méthode ait été celle qui se trouve rédigée dans le Mémoire publié plus tard sous le titre *Recherches sur les fonctions elliptiques*. Abel dut s'appliquer directement à vérifier la relation qu'il venait de découvrir

$$\theta_1[\theta_2(s)] = \theta_2[\theta_1(s)];$$

en effet, sur son cahier, à la suite du travail sur les équations abéliennes, il a dessiné une lemniscate et, au-dessous, il a écrit cette égalité :

$$f[\varphi(x)] = \varphi[f(x)].$$

La notation de ce résultat, qu'il ne craint certes pas d'oublier, cette conclusion qu'il isole du travail — fait probablement sur des feuilles volantes — est là comme un cri de victoire; c'est l' « Eureka » du savant qui vient d'aboutir dans ses recherches.

Abel montre une joie infinie de sa découverte : le 4 décembre il la communique à Crelle; et, dans le même mois, il en parle longuement à Holmboë. Il en parlera encore souvent et l'on ne voit dans son œuvre qu'une seule étude dont il ait tiré autant de satisfaction, c'est le Mémoire sur la série du binome.

Ce travail avait d'ailleurs, si nos hypothèses sont justes, une importance bien plus haute que celle du résultat auquel elle aboutissait. Abel écrivait à Crelle en lui envoyant son énoncé : « Je suis arrivé à ce résultat par ma théorie des équations liée à la théorie des nombres. » Il ne disait pas quel horizon nouveau s'ouvrait à lui par cette recherche, qui devait l'amener à considérer sous un jour nouveau la théorie de la fonction inverse de l'intégrale elliptique.

En effet, peu après avoir fait ce travail sur la lemniscate, intégrale particulière de module 1, il abordait le problème des intégrales elliptiques de module quelconque, il reconnaissait que l'équation de division était alors réductible, mais non pas en général résoluble algébriquement, et faisait des efforts — qui sont d'ailleurs demeurés vains — pour trouver la loi des modules permettant une telle résolution.

C'est de ces travaux qu'il semble s'être occupé pendant la fin de son séjour à Paris.

Notre hypothèse se ramène, en somme, à ceci : que la théorie des équations a conduit Abel à considérer de nouveau la fonction inverse des intégrales elliptiques. S'il avait, en effet, eu de longue date l'idée de l'inversion, il n'avait point vu encore la richesse de cette idée ; probablement pour n'avoir pas reconnu un rapport assez intime entre les nouvelles fonctions et les fonctions circulaires. L'exemple de la lemniscate était particulièrement heureux pour faire voir ce rapport, par suite de la distribution simple des racines réelles et imaginaires de l'équation de division. Nous ne voulons pas dire par là qu'Abel découvrait l'inversion, mais son étude des équations abéliennes donnait de la vie à cette méthode.

On peut nier l'exactitude de cette hypothèse; plusieurs textes semblent la contredire : d'abord la Communication à Degen dont on a parlé (p. 15), et, de plus, une lettre de Hansteen à Shumacher où il est dit que, au moment de la publication de Jacobi (dont on parlera bientôt), « Abel était depuis plusieurs années en possession d'une méthode générale pour la transformation ». Nous avons dit notre opinion sur le premier; pour le second, il nous semble de peu de poids : nous savons que déjà, avant d'entreprendre l'étude des équations abéliennes, Abel connaissait les règles de la transformation; mais rien ne prouve qu'il y fût parvenu grâce à l'inversion. Hansteen, peu au courant des travaux de son élève, incapable de les comprendre, ne le savait probablement pas.

Au contraire, plusieurs remarques tendraient à prouver qu'Abel avait, jusqu'au moment où nous sommes arrivés, fait peu de cas de l'inversion : c'est d'abord la méthode employée dans le travail de Freiberg; c'est ensuite le fait que, nulle part encore, il n'ait eu la pensée d'appliquer aux nouvelles fonctions son théorème d'addition quand il l'eut découvert. Enfin, ce qui nous semble l'argument le plus fort au sujet de l'influence prépondérante qu'eut la théorie des équations, c'est la rédaction même du Mémoire *Recherche sur les fonctions elliptiques* où il allait donner la théorie des fonctions inverses.

Donnons ici, afin de n'avoir pas à y revenir, une rapide analyse de ce Mémoire dont nous verrons plus tard la publication. Abel définit la fonction inverse $x = \varphi(\alpha)$ par l'équation

$$d\alpha = \frac{dx}{\sqrt{(1 + e^2x^2)(1 + c^2x^2)}} = \frac{dx}{s}$$

et deux fonctions adjacentes

$$f(\alpha) = \sqrt{(1 - c^2\varphi^2(\alpha)}, \qquad F(\alpha) = \sqrt{(1 - e^2\varphi^2(\alpha)}.$$

Il définit ensuite les quantités (périodes)

$$\frac{\omega}{2} = \int_0^{\frac{1}{c}} \frac{dx}{s}, \qquad \frac{\varpi}{2} = \int_0^{\frac{1}{e}} \frac{dx}{s}.$$

Après avoir déterminé la formule d'addition $\varphi(\alpha + \beta) = \ldots$, il montre les propriétés de double périodicité de la fonction, détermine les zéros et les pôles et toutes les racines de l'équation

$$\varphi(\alpha) = \varphi(\beta).$$

Il passe ensuite aux formules de multiplication et démontre que

$$\varphi(n\beta), \quad f(n\beta), \quad F(n\beta)$$

sont des fonctions rationnelles des quantités

$$\varphi(\beta), \quad f(\beta), \quad F(\beta).$$

Il arrive alors immédiatement au problème inverse, c'est-à-dire à la division.

L'équation

$$\varphi(\alpha) = \frac{P\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right)}{Q\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right)}$$

est de degré $(2n+1)^2$ en

$$\varphi\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right).$$

Elle est entièrement résoluble algébriquement dès que l'on connaît les constantes

$$\varphi\left(\frac{\omega}{2n+1}\right), \qquad \varphi\left(\frac{\varpi i}{2n+1}\right).$$

Ces constantes dépendent d'une équation de degré $(2n+2)\times n$ qui se décompose en une équation de degré $(2n+2)$ et des équations de degré n.

Les équations de degré n sont résolubles algébriquement; il n'en est pas de même en général de l'équation de degré $2n+2$.

Celle-ci l'est dans divers cas, entre autres dans le cas de

$$e = c = 1,$$

cas de la lemniscate.

Avant d'entreprendre cette étude particulière, Abel, à l'aide de l'équation

$$\varphi(\alpha) = \frac{P\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right)}{Q\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right)}$$

en calculant la somme et le produit des racines, passe au développement en série et en produits infinis. Il introduit dès ce moment les séries de termes en sinus et cosinus, ainsi que les développements en exponentiels qui, un jour, prendront une si grande importance dans l'étude des fonctions elliptiques.

Le problème de la division de la lemniscate est alors traité pour le cas d'un diviseur premier de la forme $4n+1$; Abel insiste beaucoup sur le résultat — identique à celui de Gauss — de la possibilité de faire la division par racine carrée (c'est-à-dire géo-

métriquement avec le compas) quand le diviseur est premier et de la forme 2^n+1.

Dans la seconde partie du Mémoire, Abel s'occupe de la transformation; il ne pose d'ailleurs pas le problème de façon générale, et la rédaction se présente comme la vérification d'une formule donnée. Il est donc difficile de savoir comment l'auteur est parvenu à découvrir cette formule. Ce qu'il faut remarquer c'est que les constantes qu'elle contient sont les diverses racines de l'équation de division pour un certain diviseur. Enfin, un dernier paragraphe traite de la transformation d'Euler généralisée, c'est-à-dire de la résolution algébrique de l'équation

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1+\mu y^2)}} = a\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1+\mu x^2)}}.$$

Il détermine que a doit être rationnel ou le produit par $\sqrt{-1}$ de la racine carrée d'un nombre rationnel.

Une remarque d'Abel qu'il ne faut pas oublier de noter est celle-ci : que dans la transformation la plus générale le module e de l'intégrale donnée et e_1 de l'intégrale transformée étant liés par une équation algébrique, les résultats se conserveraient que ces quantités fussent réelles ou imaginaires. Il est permis de penser que le mathématicien comptait un jour étudier la question de ce point de vue.

Ce qui nous frappe dans la lecture du Mémoire est donc l'importance prépondérante de l'équation de la division. Cette prépondérance est d'ailleurs indiquée par l'auteur : « La solution de cette équation est l'objet principal de ce Mémoire », écrit-il dès le début. Elle donne à toute la théorie des fonctions elliptiques dans l'œuvre d'Abel, du moins jusqu'à une certaine époque, un

caractère très particulier d'étude algébrique, caractère qui se maintiendra dans les futurs Mémoires sur la transformation et même dans le *Précis* d'une théorie des fonctions elliptiques. C'est ce caractère qui nous a conduit à considérer, en maintenant toutes nos réserves, l'étude des équations abéliennes comme antérieure à l'étude *complète* de la fonction inverse.

Ce n'est là qu'une hypothèse et l'on pourrait, au contraire, supposer qu'Abel fut amené par l'étude de la division de l'arc elliptique à celle des équations abéliennes. Cette opinion se défendrait; et il suffirait de posséder un texte particulier, datant d'une certaine époque, pour justifier l'un ou l'autre avis.

Ni l'un ni l'autre ne saurait d'ailleurs être complètement vrai, car il nous est impossible de comprendre de quelle manière travaillait Abel. Les deux théories étaient, en réalité, mêlées, et progressaient ensemble; tout ce que nous pouvons faire est de déterminer une certaine ordonnance dans la genèse de ces pensées qui, mises à nu devant nous, formeraient un chaos où nous serions impuissants à pénétrer.

Après cette longue parenthèse, qui nous a entraîné à parler de travaux effectués à une époque bien postérieure à celle où nous sommes arrivé, revenons à la vie d'Abel.

Pendant les derniers mois de l'année 1826 il était aussi seul, aussi triste; toujours incapable de rédiger ses travaux, il continuait l'étude des fonctions elliptiques. A quel point en était-il ? Rien ne nous l'indique. Il devenait chaque jour plus pauvre, et, à la fin de décembre, après avoir, en partie, épuisé les quelques louis que lui avait envoyés Holmboë, il vit qu'il lui restait exactement l'argent nécessaire pour gagner Berlin.

Aux environs de la Noël, il quitta Paris; il sortait seul, ignoré, pauvre, le cœur chargé d'inquiétudes, de cette ville inhospitalière où, six mois auparavant, il était venu chercher la gloire. A Paris, il laissait son plus beau travail auquel nul n'avait pris garde; et il emportait avec lui, selon son expression, « une riche moisson de connaissances ». Cette moisson, il ne pourrait la faire fructifier que dans le milieu affectueux et compréhensif qu'il comptait trouver à Berlin.

Avant de partir, il avait manifesté l'intention de passer à Göttingue, ce qui le détournait peu de sa route. « J'irai, écrivait-il à » Holmboë (décembre 1826), faire le blocus de Gauss, s'il n'est » pas trop fortifié d'orgueil. » Mais il n'en fit rien et arriva à Berlin sans avoir vu le mathématicien allemand, fermant ainsi, selon l'expression de M. Bjerknes, le cercle qu'il décrivait autour de la ville universitaire, comme s'il avait craint d'en approcher.

Que s'était-il passé ? On l'ignore. Abel ne parla plus de ce projet avorté. Avait-il encore eu un accès de timidité ? Avait-il trop peu d'argent pour se permettre un arrêt durant son voyage ? N'avait-il pas eu plutôt, maintenant qu'il savait sa propre valeur, un sentiment de propriété scientifique, qui l'avait éloigné d'un savant dans lequel il pouvait voir un adversaire sur un même terrain de recherches. Ce sentiment peut surprendre de sa part; mais est-il incroyable chez l'homme qui, bientôt, montrera une telle colère devant la publication de Jacobi.

» Ce voyage », écrit-il en arrivant à Berlin, « a été terriblement vide. » Abel avait pourtant traversé des pays nouveaux; il avait vu Bruxelles, Aix-la-Chapelle, Cologne et Magdebourg;

6

mais son cœur était triste, vieilli par six mois de solitude et par les déceptions. Qu'importaient les villes, les routes parcourues ! Il n'avait plus de jeunesse, d'entrain, ni la société qui, six mois auparavant, avait donné à son esprit l'illusion de la curiosité devant des spectacles nouveaux. Descendu dans la profondeur de son être, il avait senti que, hormis les beautés mathématiques, hormis les sentiments d'affection, rien ne le pouvait toucher. Ses facultés d'observation étaient encore aussi aiguës, mais elles se manifestaient maintenant avec une certaine amertume, une certaine ironie, presque française, où perçait beaucoup d'indifférence.

« Entre Paris et Valenciennes », dit-il, « j'ai voyagé seul avec une danseuse; elle a dormi dans mes bras, bien entendu, mais c'est tout. D'ailleurs, nous avons eu une conversation très édifiante sur l'instabilité des choses de ce monde... »

« Entre Erntelfeld et Arnsberg, nous eûmes le malheur de passer sur le corps d'un garçon de 7 à 8 ans. Il est resté mort sur place. La voiture lui avait roulé sur le corps. On continua la route sans s'arrêter... »

Toute sa triste philosophie semble être rassemblée dans cette dernière phrase. Pourquoi s'attarder au malheur qui frappe auprès de vous; pourquoi gémir de l'irréparable, passez et continuez votre tâche! Abel ne s'est pas plaint d'avoir vu à Paris crouler ses espérances et va poursuivre son travail dans un milieu plus clément.

Il eut un moment de soulagement en arrivant dans les pays germains : « A Aix », dit-il, « il me semblait être comme un peu chez nous », et ce fut avec une véritable joie qu'il se retrouva à Berlin. « Un quart d'heure après mon arrivée j'étais assis

au Königstatter et j'avais la joie de voir des visages de connai sance et d'entendre des voies connues. » Il retrouvait enfin d amis, sinon intimes, du moins sympathiques; ce n'était p Holmboë ni même Bœck ou Keilhau, mais tout de même bons camarades avec lesquels il pourrait dépenser un peu de sentimentalité que les Français n'avaient pas comprise. Il r trouvait aussi Crelle, son éditeur et son ami, et, avec lui, la jo des longues conversations mathématiques.

Son bonheur à se sentir dans cette atmosphère lui faisait oubli les soucis d'argent. A son arrivée, il lui restait 13 thalers; il e prunta à un ami, Becker, 50 thalers et réclama à Bœck — qui trouvait alors à Munich — le remboursement des avances qu'il avait faites un an auparavant. Il écrivit aussi à Holmboë; s projet était d'obtenir de quoi subsister pendant six mois, puis retourner en Norvège.

Les réponses devaient être lentes à venir. Comment le math maticien vécut-il pendant les mois de janvier et de février 182 d'emprunts, de petits travaux pour le *Bulletin de Ferrussac*, aussi des petits bénéfices qu'il continuait à faire au jeu. « plume les gens », écrivait-il avec gaîté. De Crelle, il refusait les offres d'appointements, et la proposition, aujourd'hui ren velée, de demeurer à Berlin et d'y prendre la direction journal. Abel n'avait plus qu'un désir : se fixer à Christian On espérait, avait écrit Hansteen, lui obtenir une chaire à Faculté, et le jeune Norvégien, sûr maintenant de sa valeu pensait bien pouvoir l'exiger; il n'admettrait même pas situation subalterne : « Il a été question, écrit-il à Bœck, me torturer pendant un an dans une école. Si l'on veut fa cela, je ne marcherai pas plus qu'un âne. »

Ainsi, l'éventualité de demeurer en Allemagne qu'il acceptait trois mois auparavant, il l'avait complètement rejetée des projets possibles dans l'établissement de sa vie. Il avait bien senti qu'à Paris son isolement était dû, avant tout, à sa nature d'étranger, et, bien qu'à Berlin la vie fût plus douce, plus proche de sa sensibilité septentrionale, il savait qu'il n'y connaîtrait jamais la paix complète du cœur. Qui remplacerait jamais l'amitié d'Holmboë et la tendresse maternelle de Mme Hansteen? A ces sentiments se joignait l'idée du devoir qu'il avait assumé en acceptant une bourse de l'État norvégien; ne devait-il pas venir se mettre à la disposition de ceux qui l'avaient fait vivre! Il s'y joignait aussi la crainte d'engager, encore jeune, sa vie dans une autre direction que celle que son enfance avait rêvée; ce rêve d'être un jour à Christiania un grand homme après y avoir été un écolier! Ce mélange de sensibilité, d'orgueil, de conscience, l'empêchait d'accepter la rétribution de son travail dans le présent, la sécurité matérielle pour l'avenir; il aimait mieux vivre d'emprunts dont le remboursement était problématique, que de se faire payer les Mémoires qu'il donnait à Crelle. Aussi était-il très pauvre; mais, malgré sa situation misérable qui s'accrut par la rigueur de l'hiver, malgré les ennuis d'une maladie, première atteinte, peut-être, du mal qui devait l'emporter, il ne se plaignait pas. Tout heureux d'avoir quitté Paris, il avait repris sa vie d'autrefois, les réunions amicales, les promenades, les « Lundis » de Crelle, enfin le travail. Il se remettait maintenant à des rédactions. Dès les premiers jours de son arrivée, il écrivait à Holmboë un court billet :

« Cette fois-ci encore tu n'auras pas grand'chose de moi, j'ai

si terriblement à faire pour le *Bulletin de Ferrussac* et pour le *Journal de Crelle.* »

Nous savons ce que sont les besognes destinées au *Bulletin* Pour Crelle, autant que nous pouvons l'imaginer, il refait de nouveau le Mémoire sur la série du binome qui va paraître en mars dans le quatrième fascicule; peut-être aussi aide-t-il à la rédaction du journal; peut-être écrit-il à ce moment un court Mémoire, sans grand intérêt, sur une classe d'intégrales définies, lequel fut également publié par Crelle.

Il reprend maintenant ses travaux sur les équations et les fonctions elliptiques; pendant les deux premiers mois de son séjour à Berlin, il semble recommencer ce qu'il a fait à Paris, et, dans une lettre à Holmboë, datée du 4 mars 1827, il communique à son ami les mêmes énoncés qu'il lui a transmis au mois de décembre, savoir : la propriété des équations résolubles de degré non premier et la division de la lemniscate pour le cas où la résolution se fait par radicaux carrés.

« Mais », ajoute-t-il, « ce que j'ai de plus beau, c'est dans la théorie des fonctions transcendantes en général et des fonctions elliptiques en particulier. Mais cela, il faut que je le garde jusqu'à mon retour pour te le faire connaître. Au total, j'ai fait une masse effrayante de découvertes (Bjerknes traduit : masse informe). Si encore je les avais mises en ordre et rédigées, mais la plupart ne sont encore que dans ma tête. Il n'y a pas à songer à quoi que ce soit avant que je sois installé convenablement chez nous. Alors, il me faudra travailler dur comme un cheval de fiacre, mais avec plaisir, bien entendu... ».

Remarquons cette dernière phrase, elle nous ramène à plusieurs mois en arrière. Pas plus à Berlin qu'à Paris, Abel n'est

libre de travailler comme il le désire; plus bas, dans la lettre, d'autres paroles nous semblent une répétition de ce qu'il écrivait au mois d'octobre précédent :

« Je mène une vie assez ennuyeuse, car elle est sans variété. Étudier, manger, dormir et pas grand'chose de plus. »

La fin de la lettre est fort décousue, écrite au courant de la plume.

« Il me tarde de rentrer au pays, car je ne peux guère avoir d'avantage à rester ici. Quand on est chez soi, on se fait de l'étranger de diables d'idées, autres qu'il ne faudrait. Ils ne sont pas si forts. Les gens en général sont mous, mais assez droits et honnêtes. Nulle part, il n'est plus facile d'arriver qu'en Allemagne et en France; chez nous, c'est dix fois plus difficile. J'entends dire que tu as été à Upsal et à Stockholm. Pourquoi n'es-tu pas venu plutôt à Paris ? Il faudra que j'y retourne une fois avant de mourir... ».

On sent, à travers ces lignes, la lutte entre sa raison qui lui conseille de rester à l'étranger et son instinct qui le rappelle vers la Norvège. A Paris, il avait cru ne souffrir que de l'isolement; à Berlin, il sent que son mal est la nostalgie, mal réel, physiologique, dont rien ne peut le guérir.

Dans un billet adressé à Mme Hansteen, le même jour probablement, son état d'esprit est plus clair encore. A un moment il écrit : « Je suis maintenant à Berlin, et j'en suis heureux. » Et, plus haut, on trouve ces phrases dans lesquelles il met tout son cœur :

« ... [1] Sentir qu'il m'arrivera souvent d'aller chez vous. Ce

[1] Le début de la lettre manque.

sera vraiment une de mes meilleures joies. Mon Dieu, que de fois n'ai-je pas été vous voir, mais je n'ai pas osé. Que de fois suis-je allé jusqu'à votre porte, et je suis reparti de crainte de vous importuner... »

C'est l'appel des choses passées, chargées de douceur, de tendresse et d'émotion. Abel retrouve son cœur d'enfant, et ne peut résister à la voix qui l'appelle; qu'importent les difficultés qui l'attendent au pays, puisqu'il ne peut connaître la paix du cœur que dans l'atmosphère de la Norvège.

Il resta cependant deux mois encore à Berlin. A la fin de février, il avait reçu de Holmboë 293 marks, et demeura à l'étranger aussi longtemps que le lui permit cette faible somme. Qu'attendait-il pour rentrer ? Rien, et beaucoup de choses; il espérait recevoir la nouvelle d'une nomination à Christiania et hésitait encore à renoncer à la situation que lui offrait Crelle; il voulait aussi retarder son retour afin qu'on ne lui reprochât pas d'avoir écourté son voyage, lequel aurait dû être de deux années; enfin, il avait peut-être l'espérance d'avoir un jour quelques nouvelles de son Mémoire de Paris. Rien n'arriva de ce qu'il attendait.

Au début de mai, il partit, et passa par Copenhague où se trouvait sa fiancée. Il ne sembla pas avoir de joie à cette rencontre. En deux ans, son cœur avait pris trop de maturité pour qu'il pût considérer avec le même calme l'avenir qui l'attendait dans un mariage décidé en dehors de toute passion. Peut-être avait-il senti naître dans son cœur un autre amour, ou seulement avait-il conçu que l'amour existât. Ce mariage lui représentait un accroissement de charges dans un avenir sans

sécurité. Aussi, maintenant, seules sa douceur devant la jeune fille qui lui montrait tant d'attachement, et sa sensibilité parfaitement honnête l'empêchaient-elles de rompre ce qui avait été conclu ; et il retrouvait, sans un élan de joie, sa fiancée dans la ville où, pourtant, il l'avait vue pour la première fois.

En même temps que Mlle Kemp, il rencontra une jeune fille amie, Carite, la sœur de Mme Hansteen, et les gens qui virent le mathématicien ont dit qu'il avait semblé plus heureux de voir une personne qui touchait de si près à sa seconde mère, que de retrouver celle qu'il devait épouser.

Vers le milieu de mai, il prenait le bateau à Copenhague, et rentrait après 20 mois d'absence en Norvège, pauvre d'argent, riche de connaissances, mais sans avoir obtenu en Europe la moindre consécration officielle de son génie.





CHAPITRE III.

DERNIÈRES ANNÉES.

(1827-1829).

Au mois de mars, Abel avait écrit à Holmboë :

« Quand j'arriverai au pays, je serai si dénué que je serai bien obligé de tendre la main à la porte de l'église. »

Deux mois plus tard, il est bien aussi pauvre qu'il l'a prévu. Dans son pays, quand il y revient, il n'y a pas de place pour lui ; à la Faculté, pas une chaire vacante. Il ne peut demander qu'on lui crée un emploi : personne, à Christiania, ne comprend ses travaux ; personne, en Europe, ne semble y avoir pris garde. S'il réclame quelque chose, on lui répondra qu'il n'a pas tenu les promesses faites en son nom par ses maîtres.

Aussi dans la lettre où, le 2 juin 1827, il fait part au Conseil Académique de son retour, ne peut-il que se recommander à la faveur bienveillante du gouvernement. C'est la répétition de la requête qu'il présentait quatre ans plus tôt pour obtenir de quoi continuer ses études. Le Conseil l'entend bien ainsi et demande au ministre de renouveler la bourse de 200 spd qui lui avait été accordée avant son voyage. Au bout d'un mois, la réponse arrive,

c'est un refus. Désespéré, n'ayant rien à attendre d'ailleurs, Abel renouvelle sa demande. « Je suis absolument sans ressources, écrit-il, pour me procurer même les choses les plus nécessaires, et il en a été ainsi depuis mon retour », et, pour prouver qu'il mérite quelque chose, il joint à sa lettre les numéros parus du *Journal de Crelle*.

La réponse arrive le 18 août seulement; la bourse est encore une fois refusée, mais le ministre autorise l'Université à faire, sur sa propre caisse, l'avance des 200 spd demandés.

De cette somme, Abel reçoit la moitié, et peut ainsi faire patienter des créanciers pressants, mais il lui est retenu 24 spd pour couvrir des engagements charitables pris par son père, le pasteur, dix ans auparavant. Le reste doit lui être livré mensuellement par douzième. Le mathématicien se trouve ainsi recevoir environ 1^{fr},20 par jour; tout juste de quoi ne pas mourir !

Encore avait-il dû attendre deux mois avant d'obtenir ces faibles subsides. On ne sait comment il aurait vécu pendant ce temps, sans le secours d'Holmboë. « Je suis né », disait-il, « pour être à charge à mes amis », et il n'avait d'autre appui, à ce moment, que ce premier maître qui l'aimait et l'admirait. Une porte à laquelle il aurait dû pouvoir frapper, celle qu'il avait si souvent franchie, quand, enfant, il cherchait des moments de calme familial, lui était maintenant fermée. Abel était en froid avec Mme Hansteen.

Que s'était-il passé ? On raconte qu'il s'était ouvert à sa seconde mère de ses doutes sur le bonheur qui l'attendait dans son union avec Mlle Kemp, et d'un attachement nouveau pour Carite Frederichsen, la jeune fille rencontrée à Copenhague, propre

sœur de celle à qui il se confiait. Mme Hansteen lui aurait fait des reproches cruels; Abel, blessé, se serait brouillé avec son amie.

Telle est la tradition. Le seul renseignement précis que nous ayons sur cette crise de cœur est un singulier billet, en français, adressé par Abel à Mme Hansteen. Il n'est pas sans intérêt d'en donner le texte.

Christiania, 18 août 1827.

« Excusez, Madame, que je prends la liberté de vous adresser » la présente; ayant quelque chose à vous dire, mais pas la force » et le cœur de vous fatiguer par la vue de ma personne insignifiante, je me suis résous à prendre cette démarche. Voilà dont » il s'agit. Je dois recevoir, ce soir, avec la poste, une lettre de » ma future, mais malheureusement, je ne suis pas en état de la » chercher moi-même, étant invité à passer le soir chez » M. le professeur Holmboë, chez lequel il est impossible de » savoir le moment quand le bateau à vapeur arrive ou d'en être » informé. Je vous prie donc, Madame, de vouloir bien avoir la » complaisance de charger votre servante de cette commission; » de prendre ma lettre à la poste en même temps qu'elle y va » chercher celle que vous attendez très certainement de votre » cher époux. Désirant de même, comme vous pouvez bien vous » le figurer, avec toute la force de mon âme, d'avoir des nouvelles de ce que j'aime le plus; j'ose encore souhaiter que la » domestique aille me donner la lettre chez le professeur Holmboë, » demeurant au second en face du théâtre dont les habitués ont » été réjouis tant de fois par vos charmes.

» Agréez, Madame, l'assurance de ma plus parfaite considéra-
» tion avec laquelle j'ai l'honneur d'être

» votre serviteur
» très humble et très obéissant,

« N.-H. Abel. »

Cette lettre ne donne-t-elle pas à penser que la tradition n'est pas exacte? Pourquoi l'emploi de la langue française — car c'est la seule lettre d'Abel à un compatriote écrite en une langue étrangère — et ces phrases qui semblent des souvenirs d'un roman galant? Pourquoi ce dépit qui se manifeste assez lourdement au début et plus encore à la fin? Pourquoi cette insistance sur le désir qu'il a de recevoir une lettre de sa fiancée, « ce qu'il aime le plus »?

Qu'on se rappelle les mots qu'il écrivait de Berlin, dans cette lettre dont le début, comme avec intention, a été déchiré : « ... Mon Dieu que de fois ne suis-je pas allé vous voir, mais je » n'ai pas osé... Que de fois, je suis allé jusqu'à la porte et je » suis reparti de crainte de vous importuner.... »

Rapprochée de ces lignes, la lettre que nous venons de lire ne semble-t-elle pas d'un soupirant qui fut maltraité?

Avions-nous pas eu déjà l'impression qu'il y avait entre Abel et Mme Hansteen quelque chose du sentiment de Jean-Jacques pour Mme de Warens? Quoi d'étonnant que l'enfant, en vieillissant, ait senti se transformer son affection filiale en un sentiment plus passionné et que le vague besoin d'aimer de son cœur solitaire se soit fixé sur celle qui avait apporté dans sa vie la douceur d'une tendresse féminine; elle n'avait, somme toute, que quinze

années de plus que lui. Que plus sage et moins généreuse que la dame des Charmettes, Mme Hansteen ait accueilli par des paroles sévères les confidences — bien timides probablement — de son ami, c'est assez pour expliquer une blessure sentimentale d'amour-propre et la répugnance d'Abel à retourner chez celle qui lui avait été autrefois secourable.

A le voir si pauvre, sans autre appui qu'Holmboë, il nous paraît plus misérable qu'à Paris; d'autant qu'à Christiania, il doit sentir plus douloureusement les charges attachées à sa vie. Sa famille, à Gjrrestad, est dans la misère, son frère aîné est devenu idiot, le troisième fils, encore étudiant, semble assez dissipé; seule, sa sœur Elisabeth, gouvernante dans une famille aisée, gagne sa vie. A tous ces êtres dont il a été l'espoir, Abel ne peut même faire attendre des jours meilleurs.

A la fin de l'année 1827, pourtant, si le présent restait sombre, l'avenir semblait s'éclairer un peu. Déjà, à la fin des vacances, Abel avait pu, aux maigres revenus que lui donnait l'Université, ajouter le prix de quelques répétitions. — Il est touchant de lire sur ses cahiers, au milieu des recherches transcendantes, des petits exercices de trigonométrie destinés à ses élèves. — Maintenant, au début de l'hiver, la perspective d'une situation s'offrait.

Le professeur Hansteen devait, au printemps, partir pour la Sibérie, en mission officielle : on aurait donc à pourvoir aux chaires qu'il occupait, tant à l'Université qu'à l'École Militaire.

Hansteen proposa que le jeune mathématicien eût, pendant son absence, un poste de « Docent » à la Faculté et, de plus, qu'il partageât avec Holmboë, les bénéfices des cours de l'École Militaire. Cette seconde demande fut immédiatement accordée.

Pour ce qui était de la chaire de l'Université, une difficulté se présenta : on semblait vouloir obliger Hansteen à payer de ses propres deniers les appointements de son remplaçant; le professeur, bien entendu, s'y refusait.

Les démarches que fit Abel eurent alors pour premier effet de renouer ses relations avec Mme Hansteen. L'excellente femme reçut de nouveau, avec la même douceur qu'autrefois, son enfant adoptif; de plus, elle attira chez elle sa fiancée, Crely comme il l'appelait, qui, ayant quitté le Danemark, était gouvernante dans une famille d'industriels norvégiens. Elle s'appliquait à nouer, avec une nouvelle force, des liens que le temps, l'esprit inquiet d'Abel et son égarement d'un moment avaient failli briser. Sa nature douce et charmante avait bien vite attaché à elle la jeune fille. « Crely, lui écrivait Abel, a pour vous autant d'affection que moi. »

En même temps, il s'était créé de nouvelles amitiés, sinon par son génie, du moins par sa gentillesse et par cette confiance complète qu'il accordait à ceux qui lui plaisaient. Le professeur Michel Schjelderup, vieillard philanthrope, dont le nom est encore connu en Norvège, le recevait comme un enfant de sa maison; Abel allait aussi dans la famille Treschow où sa sœur était gouvernante; enfin le monde savant l'avait adopté : il était membre de l'Académie des Sciences de Trontjem, et fondait à Christiania même, avec Keilhau et Möller, ses compagnons de voyage, une petite société scientifique, véritable noyau d'une future Académie.

A Berlin, Crelle s'occupait de lui et lui faisait entrevoir la possibilité d'y être, un jour, appelé comme professeur de Mathématiques.

En janvier 1828, sans être encore nommé « Docent », il commençait son cours à l'Université; Hansteen, qui ne devait partir qu'au printemps, avait pris prétexte de ses préparatifs pour forcer ainsi — avec l'assentiment du Conseil Académique — la main au Gouvernement.

Mais, malgré tout, sa situation matérielle restait précaire. Sa pension, jointe au traitement de l'École Militaire (11 s.p.d. par mois), ne pouvait suffire aux besoins quotidiens. Il n'avait jamais été économe de son bien; son frère, qui achevait ses études, l'obligeait à des dépenses; il devait s'endetter encore. Par un décret du 10 mars, il obtenait les appointements de Docent (400 s.p.d. par an); ils étaient dépensés d'avance.

Jamais il ne connaîtra la douceur de sentir sa vie assurée. En août 1828, il écrira à Mme Hansteen :

« Je suis pauvre comme un rat d'église, je n'ai plus que 1 s.p.d., qu'il me faut tout à l'heure donner en pourboire; et je n'ai pas gaspillé un skiling... »

Et en novembre :

« J'en suis toujours à 400 s.p.d., et je suis toujours dans les dettes jusqu'au cou, mais je m'en suis tout de même un peu dégagé. Ma précédente hôtesse « La Reine » n'a pas reçu un skiling et je lui dois 82 s. p. d. A la Banque, j'ai réussi à diminuer jusqu'à 160 et chez le marchand de drap de 45 à 20. En outre, je dois au cordonnier, au tailleur, au restaurateur, mais d'ailleurs, je n'emprunte pas. Mais il ne faut pas vous apitoyer sur moi pour cela, je m'en tirerai bien... »

On dirait que sa vie a été vouée à la misère; sa misère l'use, le mine; à mesure que le temps avancera, les jours de maladie seront plus fréquents.

Mais Abel est en Norvège : revenu dans l'atmosphère du pays natal que vient éclairer un peu d'espérance, les privations semblent peu douloureuses, les souffrances faciles à porter. Bien plus, cet esprit tumultueux, qui paraissait ne jamais prendre le temps de s'arrêter pour considérer le chemin parcouru, s'apaise : Abel, de retour à Christiania, va mettre en ordre ce qu'il appelle sa *masse informe* de découvertes.

*
* *

Nous pouvons suivre la marche de ses études sur ses grands cahiers in-folios, semblables à celui de Paris. La lecture en est plus difficile : les choses y sont souvent inscrites sans ordre, et deux, au moins, de ces cahiers ont été utilisés en même temps. Ces précieux manuscrits contiennent, outre des Notes et des brouillons, des fragments complètement rédigés qu'Holmboë publiera en 1839 ; entre autres, deux travaux d'une haute importance : le *Précis d'une théorie des fonctions elliptiques,* et le *Mémoire sur la résolution algébrique des équations.*

La première étude que nous rencontrons traite des séries en sinus. Abel ne s'attarde pas à poursuivre cette recherche ; il doit d'abord reprendre ses découvertes sur les fonctions inverses. Ses travaux sont refaits — et cela est à noter — dans l'ordre où ils furent faits à Paris, savoir : la théorie des équations abéliennes, puis celle de la division de l'arc elliptique. Peut-être a-t-il alors l'intention de faire rentrer ces deux sujets dans le cadre d'un Mémoire ? Il ne persiste pas dans cette intention, et dès l'été, il envoie à Crelle la première Partie de ses *Recherches sur les fonctions elliptiques* telle qu'elle nous est parvenue. Ce premier article comprend les définitions, les propriétés fondamentales,

la division de l'arc et les développements en séries et produits infinis.

Abel n'a pas le courage de rédiger immédiatement la seconde partie qui doit contenir le problème de la lemniscate et l'étude de la transformation. Il est pourtant maître de ce dernier sujet, car vers la même époque — entre les mois de mai et d'octobre 1827 — Crelle reçoit, pour être insérés dans le journal, deux énoncés de théorèmes, donnés sans démonstration, traitant de la transformation des intégrales de deuxième et troisième espèce.

Nous trouvons alors, dans l'ordre chronologique, le commencement d'une rédaction de l'ouvrage qui deviendra le *Précis d'une théorie des fonctions elliptiques* dont nous nous occuperons plus tard, des études sur les équations et des recherches sur les séries. Sur ce dernier sujet, Abel envoie à Crelle, vers le mois d'octobre, un admirable Mémoire extrêmement bref dont la portée est immense. Ce Mémoire, intitulé *Note sur le Mémoire de M. Olivier,* arrête une foule de recherches qu'on serait tenté d'entreprendre sur les séries. Il y est démontré que, u_n étant un terme d'une série et $\varphi(n)$ une fonction du rang n, on ne saurait trouver une telle fonction φ qui permette d'affirmer que $\sum u_n$ soit convergent quand $u_n \varphi(n)$ tend vers zéro.

Si l'on n'a point le temps de lire l'œuvre d'Abel, du moins peut-on méditer sur ces quelques pages; il n'en est pas qui montrent mieux sa merveilleuse lucidité d'esprit et son admirable faculté d'invention.

C'est seulement au début de 1828 que — probablement sur une demande de Crelle— il reprend son Mémoire sur les fonctions elliptiques.

Après avoir — en vain semble-t-il — cherché le cas le plus général de résolution algébrique pour l'équation de division, il envoie à Berlin la seconde partie des *recherches,* c'est-à-dire le problème de la lemniscate et la théorie de la transformation.

Peu après l'envoi de ce Mémoire, dans le courant de février, Abel voit dans les *Annales de Schumacher* deux énoncés donnés sans démonstration (l'un est du 13 juin, l'autre du 2 août), concernant un cas général de transformation. Cet énoncé est de Jacobi, privat docent à Kœnigsberg, mathématicien déjà fort connu, bien que plus jeune qu'Abel. Il envoie alors à Crelle une « Addition » à son Mémoire démontrant que l'énoncé de Jacobi rentre comme cas particulier dans la théorie qu'il vient de donner. A ce moment il ne semble pas attacher d'autre importance à ce fait, sinon qu'il y trouve une sanction nouvelle de la généralité de ses recherches.

Peu après, il rédige le Mémoire sur les équations abéliennes et l'envoie, le 29 mars 1828. C'est la première fois qu'il date un de ses travaux, l'exemple lui en a sans doute été donné par des articles de revues qu'il vient de lire. On ne voit en effet aucune raison pour lui faire attacher ainsi un certificat de priorité à un ouvrage.

Quoi qu'il puisse paraître, ces travaux qu'Abel livre au public ne forment qu'une faible partie de ses découvertes. Il semble que, toujours, la rédaction lui soit un travail pénible; il ne publie pas ses résultats sur la théorie des équations et sur celle des transcendantes, ni même tout ce qu'il sait des fonctions elliptiques, et laisse encore son esprit l'entraîner vers des points de vue de plus en plus généraux. Nous voyons qu'à un moment, par exemple, ayant trouvé la relation la plus générale entre des

fonctions elliptiques dont la somme est exprimable en fonction algébro-logarithmique, il abandonne son travail et va plus haut : chercher, entre des transcendantes à différentielle algébrique, la relation la plus générale, exprimable en fonction algébro-logarithmique. Il ne semble même pas noter les résultats intermédiaires, encore moins les publie-t-il.

Est-ce encore l'effet de cet emportement dont nous parlions autrefois? Est-ce la crainte de revenir en arrière? Il semble qu'il s'y joigne maintenant une certaine indifférence. Abel vit dans un isolement intellectuel presque complet; personne, auprès de lui, ne le comprend. Certes, son imagination mathématique, tout comme son cœur, eût aimé à s'épancher — la joie qu'il avait à causer avec Crelle le prouve — mais il n'a pas trouvé 'amitié digne d'elle. Il travaille pour lui seul, et satisfait par es études des curiosités qu'il se crée lui-même.

Ce qui fait bien voir son indifférence, c'est le peu de souci 'il a du sort de ses Mémoires, une fois rédigés et envoyés à lle. Depuis que l'Académie de Paris a dédaigné son travail, araît convaincu que le monde savant se désintéresse de ce peut faire. Aucun de ses travaux ne lui a valu une lettre Legendre, ni de Cauchy, ni d'aucun autre mathématicien. e serait-il arrivé si un tel état d'esprit s'était maintenu? ien de découvertes allaient demeurer inconnues! Heureu- , le cœur d'Abel est encore susceptible. Qu'à un moment, te attaqué, qu'il voie son œuvre menacée, il sortira de ment, il prendra sa part de la vie scientifique de l'Europe, renant qu'il doit se hâter de publier ses travaux, il en e que, dans le peu de mois qui lui reste à vivre, il aura le rédiger.

Cette menace, il la sentit, quand, à la fin du mois d'avril 1828, il lut dans les *Annales de Schumacher* la démonstration de Jacobi, se rapportant aux théorèmes dont il s'était occupé deux mois plus tôt.

Cette solution était parue depuis longtemps, postérieurement, il est vrai, à la publication de la première partie des *Recherches,* mais antérieurement à la rédaction même de la seconde. Abel n'en avait pas eu connaissance encore. Elle devait avoir pour lui un grand intérêt; Jacobi, en effet, usait d'un procédé qu'Abel — avec Gauss peut-être — pensait être seul à connaître : l'inversion.

Ce fut Hansteen qui lui fit voir le travail de Jacobi; l'émotion d'Abel fut très vive, il n'avait jamais pensé à une rivalité.

« Quand je lui mis sous les yeux le numéro des *Annales*, écrit Hansteen à Schumacher, il devint tout pâle et, très troublé, courut chez le pâtissier boire un bon *Schnaps* pour se remettre. »

Émotion faite, sans doute, de jalousie et de colère, peut-être aussi de la crainte d'être devancé; mais son inquiétude dut céder à un mouvement d'orgueil, quand il vit avec quelle timidité Jacobi avait employé l'inversion. Elle n'était pour lui qu'un moyen, non une idée directrice (13).

Se sentant fort, conscient du point élevé où étaient parvenues ses investigations, il dédaigna d'entamer une polémique avec son adversaire, mais décida de l'arrêter d'un coup, en publiant dans un seul article les résultats les plus généraux de ses recherches sur la transformation; et alors, en très peu de jours, il écrivit l'admirable et orgueilleux Mémoire : *Solution d'un problème*

général concernant la transformation des fonctions elliptiques.

Dans aucun, ne se montre aussi puissamment la force dominatrice de son génie.

Il débute ainsi :

« Dans le nº 127 de ce Journal, M. Jacobi démontre un théo-
» rème très élégant, relatif à la transformation des fonctions
» elliptiques. Ce théorème est un cas particulier d'un autre plus
» général, auquel je suis parvenu depuis longtemps sans con-
» naître le Mémoire de M. Jacobi. On en trouve la démonstra-
» tion dans un Mémoire inséré dans le journal de M. Crelle et
» qui a pour titre *Recherches sur les fonctions elliptiques*. Mais
» on peut envisager cette théorie sous un point de vue plus
général, en se proposant comme un problème d'analyse indé-
terminée de trouver toutes les transformations possibles d'une
fonction elliptique qui peuvent s'effectuer d'une certaine ma-
ière. Je suis parvenu à résoudre complètement un grand
ombre de problèmes de cette espèce. Parmi eux, le suivant
i est d'une grande importance dans la théorie des fonctions
iptiques.

Trouver tous les cas possibles dans lesquels on pourra satis-
à l'équation différentielle

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-c_1y^2)(1-e_1y^2)}} = a\frac{dx}{\sqrt{(1-cx^2)(1-ex^2)}}$$

tant pour y une fonction algébrique de x rationnelle
tionnelle.

oblème, vu la généralité de la fonction y, paraît au
coup d'œil bien difficile, mais on peut le ramener au
n suppose y rationnelle. En effet, on peut démontrer

» que si l'équation (1) a lieu pour une valeur irrationnelle y, on » pourra toujours en déduire une autre de la même forme, dans » laquelle y soit rationnelle, en changeant convenablement le » coefficient a, les quantités e_1 et c_1, c et e restant les mêmes. La » méthode qui s'offre d'abord pour résoudre le problème dans le » cas où y est rationnelle est celle des coefficients indéterminés; » or, on serait bien vite fatigué à cause de l'extrême complication » des équations à satisfaire. Je crois donc que le problème suivant, » qui conduit de la manière la plus simple à la solution complète, » doit peut-être mériter l'attention des géomètres. »

L'exposition de la méthode diffère essentiellement de celle qu'on trouve dans ses *Recherches*. Dans cette première étude de la transformation, le raisonnement se présentait comme une vérification; ici, Abel part des prémisses, et cherche la forme d'une fonction rationnelle de transformation $y = \psi(x)$. Le moyen (qui se sent toujours de sa forme d'esprit algébriste) consiste à chercher les racines de cette équation $y = \psi(x)$, y étant supposé donné. On voit facilement qu'alors les diverses valeurs de x sont des fonctions de y qui répondent à la transformation avec même module. Ayant les racines par la considération de la fonction inverse, on obtient facilement la fonction y. Dans le calcul s'introduisent trois constantes arbitraires. Le problème des transformations rationnelles est complètement résolu (14).

Abel, à la fin du Mémoire, donnait encore, fixant ainsi tous ses droits de priorité, tous les résultats de ses recherches sur la question. Il annonçait :

1° Qu'il suffisait de considérer des transformations de degré premier;

2° Que la résolution des équations par rapport à x était possible algébriquement;

3° Quelles étaient les transformations possibles avec conservation du module.

Ainsi, il fermait réellement la voie à toute recherche ultérieure sur les transformations réelles et, par sa théorie, laissait même peu de champ à celle des transformations imaginaires.

Le 27 mai, le Mémoire était achevé. Abel le remettait à Hansteen qui se chargeait de le faire parvenir. C'était le dernier service que le professeur dût rendre à son élève; quelques jours après, il quittait Christiania.

* * *

Abel a écrit son travail dans un mouvement de passion; usant
le toutes les facultés de son génie, il a attaqué son adversaire de
ous les côtés à la fois. Lui, si doux, si timide devant les hommes
devant la vie, se sentant menacé dans son œuvre, dans ce qu'il
me de toutes les forces de son esprit, s'est défendu avec la féro-
é d'un amant jaloux.
Maintenant qu'il a une fois senti le danger de son indifférence,
e va plus laisser à l'état de brouillon les résultats de ses re-
ches, il s'empressera de les publier.
ndant qu'il écrivait son Mémoire, il a d'ailleurs su, par une
de Crelle, que plusieurs savants, Gauss entre autres, ont ma-
une grande admiration pour ses œuvres. Il lui sera donc
cile de se faire connaître; il faut qu'il livre au public
es découvertes, qu'il prenne tout entière la part de gloire
revient.
mière rédaction qu'il entreprend est celle de la *Théorie*

des équations; il n'eût pas, quelques semaines plus tôt, commencé un tel travail, car il n'est pas parvenu à élaborer une théorie aussi complète qu'il le désire, il n'a pu trouver l'expression algébrique la plus générale répondant à une équation de degré donné; mais il a découvert un critérium de résolubilité algébrique; plus tard, il démontrera que les racines algébriques s'expriment toujours en fonction des racines d'équations Abéliennes; c'est alors qu'il arrêtera la publication du Mémoire sur cette classe particulière d'équations, Mémoire qu'il a envoyé à Crelle, au mois de mars, et qui ne paraîtra que bien plus tard. De toutes ses découvertes, il compte probablement faire un seul ouvrage dont le retentissement sera, pense-t-il, immense.

Bientôt, il donne, de son état d'esprit orgueilleux, une manifestation d'une autre sorte, d'ailleurs malheureuse :

Crelle lui a demandé s'il était disposé à accepter, au cas où on la lui offrirait, une chaire à Berlin.

Abel écrit le 21 juin, au Conseil Académique, une lettre qui, sous une forme respectueuse, est une véritable mise en demeure. Peut-on lui promettre une situation définitive à Christiania ?

Il s'aperçoit bien vite de sa maladresse, et huit jours après, le 29 juin, il écrit qu'on suspende toute décision au sujet de sa lettre. Mais il est trop tard, la demande est parvenue jusqu'au Ministère qui se trouve alors conduit à examiner la situation d'Abel; et, par suite, à demander qu'on retienne, sur ses appointements de Docent, le montant de la bourse accordée à titre de prêt, l'année précédente. Le Conseil Académique intervint heureusement pour éviter au mathématicien ce nouvel ennui. En même temps, un journal s'est emparé de l'affaire et en use, on ne sait dans quel but, pour le ridiculiser.

A ce moment, Abel n'est plus à Christiania. A la fin de juin, il est parti pour Froland où il doit passer un mois auprès de sa fiancée. Ignorant de ce qui se passe, il a pu, pendant quelques jours, établir avec elle des projets d'avenir. Bientôt, il connaît les fâcheux effets de sa démarche et, peu après, une lettre de Crelle lui apprend qu'il ne doit plus, pour le moment, espérer la situation qu'il avait envisagée. Ainsi, tous ses projets s'écroulent. Nous avons l'écho de ces ennuis par une lettre qu'il écrit alors à Mme Hansteen.

« Usine à ♂⊙, de Froland.
Le lundi, 21 juillet 1828.

» Hélas! Par ce mot fatal commence une lettre de Crelle que
j'ai reçue hier, datée du 11 juillet, et je dois avouer, hélas! que la
ettre m'a beaucoup abattu. Il n'en sortira rien. Un autre s'est
résenté comme *tombé du ciel* qui a fait *valoir ses droits* (1)
qu'il faut inévitablement caser avant de songer à moi.
» ... Sa lettre est écrite d'une manière si décourageante que
perdu tout espoir. En sorte que j'en suis au même point
auparavant, c'est même plutôt pis, car j'ai été ridiculisé ici
puis l'être à l'étranger (voyez un édifiant morceau dans un
nal...). Je ne veux pas répondre afin de ne pas prolonger
vilaine affaire. Ça pourra passer pour un mensonge de jour—
enfin le temps tue tout. Quoi qu'il en soit, j'aurai peine à
ner quelque chose de plus à Christiania. Je préfère travailler
ec ce que j'ai, tant que ça durera, mais j'ai appris à me

s mots soulignés sont écrits en français au milieu du texte, lequel
rvégien.

taire. C'est une bonne chose. C'est surtout pour ma fiancée que cela me fait de la peine. Elle est trop bonne...

» ....

» De la très belle Madame Hansteen, le plus misérable chien.

» N.-H. ABEL. »

Mais qu'on ne se trompe pas au ton de cette lettre dont la résignation, comme autrefois, ressemble bien à de la mollesse. Abel n'est plus l'enfant qu'il était : un billet écrit huit jours plus tard à Holmboë témoigne que l'abattement a été passager; l'orgueil et l'énergie combative ont pris le dessus : « Mon exécution de Jacobi est imprimée, dit-il, j'en prépare une autre qui doit partir. »

Dans les premiers jours d'août, il est de retour à Christiania pour y « travailler dur avec ce qu'il a ». Il travaillera dur, en effet, et sa production sera si féconde qu'il y trouvera l'oubli de la misère quotidienne; il y trouvera aussi un adoucissement à une tristesse nouvelle, le départ de Mme Hansteen. Elle quitte Christiania en septembre; le jour de son embarquement, Abel, malade, ne peut l'accompagner au port, sa peine est immense : « Comme c'est étrange, écrit-il peu après, je ne puis me mettre dans la tête que vous soyez partie et je suis souvent sur le point d'aller chez vous.

» ... Je ne vois littéralement personne... »

Mais la conscience plus nette qu'il a de son génie a maintenant donné un but à son activité; plus que jamais, il vit pour son travail; ce travail n'est plus ce qu'il était, une création presque involontaire; une volonté le règle, une volonté tendue vers la gloire.

Un des premiers Mémoires écrits au retour de Froland n'a d'autre but que de rappeler l'existence du travail laissé à Paris. Il traite du théorème d'addition pour le cas particulier des fonctions hyperelliptiques ; en note se trouve cette phrase : « J'ai présenté un Mémoire sur ces fonctions à l'Académie royale des Sciences de Paris, vers la fin de l'année 1826. » Abel espère forcer ainsi l'égoïste indifférence du monde savant ; il mourra, hélas, trop tôt pour voir l'heureux effet de sa publication.

Quelques mois plus tard, nous trouvons une démarche plus directe. En septembre, Abel écrit à Legendre. Cette lettre est aujourd'hui perdue ; on peut penser, d'après une communication à Crelle, faite à la même époque, qu'elle traite des théories qui seront développées dans le *Précis*.

Mais le but de tous ses travaux semble être, avant tout, ce qu'il a appelé l'« exécution de Jacobi ».

Nous l'avons vu, après l'envoi à Schumacher du Mémoire *So-*
tion..., entreprendre la rédaction de ses études sur les équa-
ons (15). Bientôt il l'abandonne. Quelle raison donner de ce
t, sinon la nécessité de porter toute son activité sur un autre
nt? C'est qu'à ce moment Jacobi vient de publier dans le
rnal de Crelle plusieurs Mémoires sur les fonctions ellip-
es et que, de plus, il prépare un grand ouvrage sur le même
. Pour Abel, il s'agit donc de répondre à ces travaux par
res travaux : la rédaction rapide et la publication de courts
ires dont chacun semble correspondre à une étude de Ja-
et, en même temps la rédaction d'un *Corpus* donnant le
de toutes ses recherches sur les fonctions elliptiques ; cet
e, déjà entrepris depuis un an, a été une première fois

abandonné; nous en avons déjà parlé, c'est le ***Précis d'une théorie des fonctions elliptiques.***

Le 27 août, il envoie à Crelle des théorèmes ***Sur les fonctions elliptiques*** et débute ainsi : « La formule donnée par M. Jacobi peut être établie facilement par un théorème... ». C'est sans doute là la « seconde exécution » dont il a parlé dans le billet de Froland. Abel donne l'expression de $\varphi\left(\frac{\theta}{2n+1}\right)$ explicitement en fonction de $\varphi(\theta)$, et une formule plus générale.

Le 25 septembre c'est l'envoi à Schumacher d'un second Mémoire ***Sur la transformation;*** l'étude est limitée au cas des modules réels. La démonstration est extrêmement simple et très remarquable : pour la première fois, on ne sent plus l'influence directe de la théorie des équations sur celle des fonctions elliptiques, et cela, bien que le problème soit traité en considérant la fonction inverse. Seule la propriété de double périodicité entre en jeu.

Plus tard, pour le ***Journal de Crelle,*** le Mémoire ***Sur le nombre de transformations différentes qu'on peut faire subir à une fonction elliptique par la substitution d'une fraction rationnelle de degré donné.*** C'est là une question que n'a pu élucider Jacobi.

Enfin, pour le même journal, les ***Notes sur quelques formules elliptiques,*** démonstration des formules concernant les relations entre les modules de deux fonctions transformées l'une dans l'autre. Le nom de Jacobi y est plusieurs fois cité.

Ces Mémoires sont les seuls qu'Abel ait eu le temps d'achever et qui aient été publiés, la plupart d'ailleurs en 1829 seulement. D'autres sont préparés et, non plus à l'état de brouillons informes

comme autrefois, mais, dans plusieurs de leurs parties, complètement rédigés sur des feuilles volantes et prêts pour l'impression.

Le plus considérable, intitulé « *Recherches sur les fonctions elliptiques, second Mémoire* », est malheureusement perdu. Parmi les fragments qui nous ont été conservés, le plus important nous semble être celui où Abel applique à la fonction inverse le *théorème d'addition.*

Tous ces travaux sont destinés à être reproduits un jour dans l'ouvrage qu'il rédige : le *Précis.*

Ce *Précis d'une théorie des fonctions elliptiques* n'est, lui-même, que le résumé d'un ouvrage considérable qu'Abel projetait. Bien qu'une très faible partie en soit achevée, nous pouvons, grâce aux détails donnés dans l'*Introduction,* savoir à peu près ce qu'il devait contenir. Si incomplet soit-il, il n'est pas pour l'historien d'Abel de lecture plus passionnante; il semble que ans cette œuvre, qui devait être la dernière de sa vie, le génial athématicien ait résumé toutes les étapes de sa pensée, les re- ant l'une à l'autre par la théorie des fonctions elliptiques, et, r ce lien, donnant une unité à des recherches d'ordre différent, herche sur l'intégration, sur la résolution des équations, enfin la théorie des fonctions. Nous verrons ce que nous pouvons prendre sous cette dernière dénomination.

nous est malheureusement impossible de donner une idée de émoire. Dans la partie achevée, le texte est si plein, les dé- trations si rapides, que tout essai d'analyse serait vain. Nous herons donc seulement de quelle façon il se rattache aux passées, et quelles découvertes nouvelles il fait prévoir.

Précis est divisé en deux parties essentielles; la première

traite des fonctions elliptiques en tant qu'intégrales indéfinies (c'est-à-dire des fonctions de Legendre); la deuxième traite de la fonction inverse, et l'étude est limitée au cas des modules réels et moindres que 1.

La question résolue dans la première Partie est celle-ci :

A quelles conditions une relation linéaire à coefficients constants entre des intégrales elliptiques peut-elle être exprimable par une fonction algébrique et logarithmique?

Suivant une méthode qui lui est habituelle, Abel se pose d'abord un problème plus général :

Quelle forme a l'intégrale d'une fonction algébrique, quand on la suppose exprimable en fonctions algébriques, logarithmiques et elliptiques de fonctions algébriques des variables?

On reconnaît là l'extension d'une question qu'Abel a traitée autrefois; nous avons vu que, en ne considérant pas encore les fonctions elliptiques, le résultat était exprimé par l'égalité suivante

$$\int (y_1\, dx_1 + y_2\, dx_2 + \ldots) = u + \Sigma A_k \log v_k,$$

u et v_k étant des fonctions rationnelles de x_1, x_2, ... et de y_1, y_2, ...; A_k étant constant.

La démonstration extrêmement simple repose sur la considération d'une quantité accessoire (quantité appelée plus tard *Résolvante de Galois,* on sait qu'Abel l'a déjà employée).

Pour étendre le résultat au cas des fonctions elliptiques, il suffit d'ajouter au second membre un terme

$$\Sigma \alpha_n \psi_n(t_n),$$

ψ_n désignant une fonction elliptique, α_n étant une constante, t_n une fonction rationnelle de $x_1 x_2 \ldots y_1 y_2 \ldots$ et de même Δt_n, en désignant d'une manière générale par Δy le radical

$$\sqrt{(1-y^2)(1-e^2 y^2)}.$$

Cette extension s'obtient par une application évidente du théorème d'addition dont la démonstration a fait l'objet d'un premier paragraphe.

Ayant ainsi la forme de l'intégrale d'une fonction algébrique quelconque exprimable comme on l'a dit, il suffit d'appliquer le résultat à une intégrale elliptique.

Le problème posé se résout donc par le théorème suivant :

Si l'on a une relation

$$\psi(x) = \Sigma \beta_k \psi_k(y_k) + \Sigma A_s \log v_s + u,$$

ψ, ψ_k étant des intégrales elliptiques, on doit avoir y_k, v_s, u fonc-ion rationnelle de x, et

$$\Delta y_k = p_k \Delta x,$$

étant rationnel en x.

Abel démontre enfin que, pour que de telles relations aient n, il faut que l'on puisse avoir entre les différentielles des ctions elliptiques les relations

$$\frac{dy}{\Delta y} = k \frac{dx}{\Delta x},$$

t une constante et y l'une des fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_k$. e condition exprime que l'on peut opérer la transforma-

tion l'une dans l'autre de deux intégrales elliptiques de première espèce.

Nous donnons cet aperçu, si incomplet qu'il peut paraître inexact, pour montrer seulement comment ces travaux découlent de ceux qu'Abel fit dans sa jeunesse, depuis l'époque où il remettait à l'Université de Christiana un Mémoire sur l'intégration, jusqu'à celle où il rédigeait le Mémoire de Paris. Dans cette section du *Précis,* on trouverait facilement une place où intercaler le Mémoire de Freiberg.

Dans une seconde section, Abel traite alors de la transformation. Là, pour la première fois, il le fait sans user de l'inversion; mais la méthode est, malgré cela, identique à celle du Mémoire « *Solution*... » envoyé à Schumacher, pour la première exécution de Jacobi. Elle se ramène à la recherche des racines en x de la fonction de transformation $y = \varphi(x)$.

Ces racines se rangent en cycles, et les équations se traitent comme des équations Abéliennes. Ces travaux correspondent à ceux qui furent effectués à Paris, puis à Christiania jusqu'au début de 1828. Remarquons, qu'à propos de ces équations, Abel parle des équations modulaires, mais n'indique pas encore leurs propriétés fondamentales, ce qu'il fera plus tard. N'y a-t-il pas là une preuve assez étrange de l'ordre quasi historique suivant lequel sont rangées ses recherches?

Avec un chapitre non achevé sur la transformation par rapport au module, se termine la partie rédigée du *Précis*. Pour connaître la suite qui sera l'étude de la fonction inverse, nous devrons nous en tenir aux indications de l'*Introduction.*

Malheureusement, ces indications se bornent presque exclusivement à une nomenclature des propriétés de la fonction in-

verse $\lambda(\theta)$; Abel n'avait sans doute pas fixé encore l'ordonnance de sa rédaction; cela ne doit pas nous surprendre : cette seconde Partie n'a pas été mûrie comme la première; non seulement les découvertes dont elle traite sont récentes, mais aussi elles semblent inspirées par un esprit tout nouveau. Une remarque s'impose, en effet: c'est leur caractère analytique (en attachant à ce mot un sens opposé à celui d'algébrique) dépouillé de l'influence prépondérante qu'a eue jusqu'alors la théorie des équations.

Ainsi, par exemple, l'étude de la transformation rappelle celle que nous avons vue dans le deuxième Mémoire envoyé à Schumacher; nous en avons dit la forme particulière (16).

De plus, une propriété qui semble devoir être une base d'étude est celle exprimée par le théorème d'addition appliqué à la fonction inverse.

Ici, enfin, se rencontre une première ébauche d'une méthode evenue classique, depuis les travaux de Weierstrass, dans étude des fonctions doublement périodiques: c'est l'introducn des deux fonctions f et φ ainsi définies :

$$\lambda(\theta) = \frac{f(\theta)}{\varphi(\theta)} = \frac{\theta + a\theta^3 + \dots}{1 + b\theta^4 + \dots}.$$

après cette simple donnée, ne devions-nous pas trouver ici
hapitre se rattachant à ce qu'on appelle la *Théorie des*
ons, théorie traitée par une méthode purement analytique-
s d'ailleurs la dernière phrase de l'Introduction :
s formules de ce qui précède (deuxième Partie du *Précis*),
avec quelques restrictions, le module étant quelconque,
maginaire. »
simple n'est-elle pas de voir dans l'étude des fonctions

f et φ le moyen employé par Abel pour étendre ses résultats aux quantités imaginaires?

Abel aurait donc démontré ici non seulement la convergence de toutes les séries trouvées dans ses *Recherches,* mais aussi la qualité d'*uniformité* de la fonction inverse. Ces études sont-elles, d'ailleurs, absolument nouvelles? Non; elles se rattachent à d'autres fort anciennes, l'étude sur la série du binome et les nombreux travaux faits, pour la plupart, suivant les méthodes de Cauchy, sur les séries et sur les imaginaires. Souvent dans ses lettres il est question de ces travaux; mais, comme Abel ne les a pas rédigés, nous n'avons pas eu à nous en occuper. Leur importance était masquée par la part prépondérante qu'a prise, depuis le séjour à Paris, la théorie des équations.

Cette prépondérance était appelée à disparaître; il faut remarquer, en effet, qu'en cette fin d'année 1828 Abel avait résolu presque complètement le problème qu'il s'était posé sur la résolution algébrique des équations. Dans le Mémoire inachevé sur ce sujet, il dit avoir trouvé le criterium permettant de reconnaître si une équation est résoluble algébriquement; l'application serait, il est vrai, fort longue, mais qu'importe pour la théorie? Il a, de plus, trouvé la forme des racines algébriques; enfin, il a prolongé ses travaux sur les équations abéliennes, et, dans une note du 18 octobre 1828, il communique à Crelle cet énoncé :

« Si trois racines d'une équation quelconque irréductible, dont le degré est un nombre premier, sont liées entre elles de sorte que l'une de ces racines peut être exprimée rationnellement par les deux autres, l'équation en question sera toujours résoluble par radicaux. »

Il lui suffisait de démontrer la réciproque de cette proposition pour arriver au terme de ses études touchant les équations de degré premier (c'est l'énoncé que trouvera Galois).

Il est vrai qu'il devait être conduit à envisager d'autres familles d'équations, les équations modulaires, par exemple, dont il comptait, dans la deuxième Partie du *Précis*, démontrer les caractères.

« Ces équations, écrit-il, jouissent de la propriété remarquable que toutes leurs racines peuvent être exprimées rationnellement par deux entre elles. De même, on pourra exprimer toutes les racines par l'une d'elles à l'aide de radicaux. »

Mais, d'après le peu de place que tient dans l'Introduction cette
orte d'annonce, on peut croire que l'esprit d'Abel ne doit pas
arrêter longtemps à cette étude. D'autres aujourd'hui l'appellent.

Peut-être dira-t-on que l'imagination a une grande part dans
interprétations que nous donnons ici.
omment en serait-il autrement? Ici s'arrête l'œuvre d'Abel ;
it, pour le *Précis*, d'être son dernier travail imprime à ce
un caractère de testament scientifique; nous cherchons
ue inconsciemment à y découvrir les dernières volontés de
ur.

pression que nous avons eue se trouve d'ailleurs appuyée
document qui, postérieur probablement à l'*Introduction*
cis, peut y être joint comme un codicille. Ce document
conde lettre à Legendre. Nous n'avons pas dit encore
lles circonstances elle fut écrite, mais nous devons bien
ter sur notre récit de la vie d'Abel.
tre, mieux qu'une œuvre mûrie et rédigée, nous ren-

seigne sur les pensées profondes de l'auteur; elle est, chez Abel plus que chez tout autre, l'expression spontanée des préoccupations d'un moment. Peut-être cela est-il moins vrai pour celle-ci que pour toutes celles dont nous avons lu des fragments; Abel en fit, en effet, un brouillon (que l'on peut voir sur un de ses cahiers), mais elle conserve, malgré ce travail préliminaire, un caractère de spontanéité que ne saurait avoir le texte que nous avons étudié.

Cette lettre est une énumération de théorèmes déjà, pour la plupart, énoncés dans le *Précis*. Certains se trouvent ici plus développés que dans l'*Introduction;* il faut noter entre autres ceux qui concernent les fonctions f et φ dont nous avons parlé. De plus, il n'est pas question ici de la théorie des équations; dans la dernière phrase de sa lettre, Abel rappelle seulement qu'il s'en est occupé.

Enfin, nous trouvons ici des théorèmes qui n'avaient pas été énoncés encore, celui-ci entre autres :

Si l'on peut exprimer une fonction dont la différentielle est algébrique de la manière suivante

$$\int y\,dx = \text{fonction algébrique de } [x, \log u_1, \ldots, \psi_1(v_1)\ldots],$$

$u_1, v_1, \ldots$ *étant des fonctions algébriques de* x, *on peut toujours écrire*

$$\int y\,dx = t + \Sigma A_k \log t_k + \Sigma B_e \psi(y_e),$$

ψ *représentant une fonction elliptique,*
$t, t_k, \ldots, y_e, \ldots$ *étant rationnelles en* x *et en* y,
$A_k, \ldots, B_e$ *étant des constantes.*

Ce théorème accroît, comme on le voit, le caractère de généralité des résultats contenus dans la première Partie du *Précis*. Nous avons là un exemple frappant de la méthode de travail d'Abel, de sa manière de chercher des principes et des théorèmes toujours plus généraux. C'est bien l'application des méthodes qu'il a exposées autrefois dans la lettre de Dresde : ne jamais passer du particulier au général; descendre toujours du point de vue le plus général possible.

Peut-être aussi y a-t-il là une explication des retards qu'il apportait à ses rédactions. Cette fois, par exemple, ne devait-il pas être tenté de refaire tout un paragraphe du *Précis,* lequel se trouvait démontrer un cas particulier de son théorème général ?

Ici enfin, nous voyons encore quelles études il projetait; études r l'intégration et la théorie des fonctions. Les recherches sur s équations ont bien perdu la place prédominante qu'elles ont ue si longtemps.

ous parlerons encore de cette seconde lettre à Legendre; mais 'arrête notre étude des travaux d'Abel.
nous faut reprendre le récit de sa vie; dans cette dernière très courte, nous ne rencontrerons qu'un court Mémoire ans sa teneur, ne nous offrira aucune vérité nouvelle.

***

avons tout à l'heure prononcé les mots de testament ue. Combien Abel est pourtant loin de penser que son puisse prendre un tel caractère ! Il ne songe pas qu'il ter, que sa santé est profondément ébranlée; il fait des enir et voit approcher le moment de la gloire. Déjà il

se sait compris; il a connu, par Crelle, les opinions élogieuses de Gauss (17); voici qu'il reçoit directement des témoignages d'admiration. Le plus précieux est la réponse du vieux Legendre à la lettre qu'Abel eut l'audace d'écrire en septembre.

« La fin de votre lettre, dit le géomètre, me confond par la généralité de vos recherches..... Quelle tête que celle d'un jeune Norvégien !.... », et il cite cette phrase de Jacobi à propos de l'étude sur la transformation : « Elle est au-dessus de mes éloges comme elle est au-dessus de mes travaux. »

Spectacle touchant que la joie d'Abel recevant les éloges d'un savant qui ne peut pourtant lui être comparé ! Avec quel orgueil enfantin il l'exprime à ses amis. Il écrit à Mme Hansteen, qui n'est pas auprès de lui pour partager son bonheur :

« ..... Je me suis senti récemment fort orgueilleux à propos de quelques lettres reçues de l'étranger. Je vais vous en citer quelques passages, parce que vous savez bien que ce n'est pas pour faire le fier..... Jacobi a dit, dans une lettre à Crelle : « Je tiens cet Ouvrage de M. Abel comme un des plus beaux » chefs-d'œuvre des Mathématiques »..... Le célèbre mathématicien Legendre m'a répondu il y a quelques jours par une lettre extrêmement flatteuse. Je vais en citer quelques phrases. »

Abel copie la moitié de la lettre.

« Pour être tout à fait véridique, ajoute-t-il, j'ai cité ce qui précède en partie pour me faire un peu valoir et, en partie, parce que je crois que cela vous fera un peu plaisir, excellente madame Hansteen, de voir quel succès j'obtiens, puisque vous prenez tant de part à tout ce qui m'arrive..... »

Quelques jours après, Abel écrit à Legendre : c'est la lettre dont nous avons parlé plus haut :

25 novembre 1828.

« Monsieur, la lettre que vous avez bien voulu m'adresser en date du 25 octobre m'a causé la plus vive joie. Je compte parmi les moments les plus heureux de ma vie celui où j'ai vu mes essais mériter l'attention de l'un des plus grands géomètres de notre siècle. Cela a porté au plus haut degré mon zèle pour mes études..... »

Après quelques explications sur le nombre des transformations d'un degré donné, Abel parle du théorème d'addition. Il n'ose pas encore rappeler l'existence du Mémoire de Paris, cela pour-rait paraître un reproche, mais il renvoie Legendre au Mémoire récemment publié dans le *Journal de Crelle* où, dans une Note, a parlé de son ancien travail. Puis, ce sont les énoncés du récis, puis une nouvelle application du théorème d'addition, sujet duquel, dit-il, il prépare un Mémoire.

« Ne serez pas fâché, Monsieur, écrit-il à la fin dans son çais incorrect, parce que j'ai osé vous communiquer encore fois quelques-unes de mes découvertes. Si vous me per-ez de vous écrire, je désirerais bien de vous communiquer on nombre d'autres tant sur les fonctions elliptiques et des ons plus générales que sur la théorie des équations algé-s..... »

quel bonheur il songe à cette correspondance. Il travail-aintenant avec ardeur à la rédaction de ses découvertes. lus n'est besoin, pour cela, de l'excitant qu'était sa ran-ntre Jacobi. Cette rancune ne doit-elle, d'ailleurs, pas cie par les marques d'admiration qu'a données son

émule? Legendre, en lui en communiquant l'expression, a écrit à Abel :

« Un pareil aveu est aussi honorable pour M. Jacobi que pour vous. Vous serez sans doute dignes l'un de l'autre par la noblesse de vos sentiments et par la justice que vous vous rendrez réciproquement..... »

D'ailleurs, si le sort l'eût permis, Abel se fût bientôt rencontré avec Jacobi. Son ami, le conseiller Crelle, continuait ses démarches afin de le faire nommer à Berlin. Une nouvelle Université devait y être créée, et Crelle, avec l'appui de Humboldt, avait obtenu la promesse qu'une chaire de Mathématiques serait attribuée à Abel; une autre était destinée à Jacobi. Entre ces mathématiciens, tous deux d'âme généreuse et de génie si différent, quels autres sentiments pouvaient se former que ceux d'une parfaite amitié scientifique?

Abel connaît les projets de Crelle et sait pouvoir compter sur leur réussite; la perspective de quitter son pays ne l'effraie plus. Il ne sera plus isolé maintenant qu'on lui rend justice, qu'on le comprend. Avant son départ, dès qu'il saura sa vie assurée, il se mariera. Non pas que le bonheur d'être uni à Crely doive lui faire oublier qu'il est loin de ses amis; pas plus aujourd'hui qu'autrefois il ne parle de son union avec passion.

« Elle (Crely), écrit-il à Mme Hansteen, a tout de même de l'affection pour moi. Je n'ai peut-être pas été envers elle tout à fait comme j'aurai dû, mais maintenant nous sommes d'accord. Je me suis beaucoup corrigé et j'espère qu'un jour nous serons heureux. »

Malgré cette teinte de mélancolie, l'avenir semble sans nuage. Abel connaîtra une vie familiale et paisible que réchauffera la

joie du travail et qu'éclairera la gloire. Mais il la lui faut chercher dans l'exil. Cet exil qu'il accepte aujourd'hui, il ne le connaîtra pas, et, sans avoir le temps de quitter son pays qui lui fut si âpre, il mourra sur la terre natale pour avoir, peut-être, trop désiré d'y vivre.

* * *

C'est à Froland, près de sa fiancée, qu'il passa les derniers mois de son existence.

Froland est une petite ville minière au delà d'Arendal, dans les montagnes, à peu de distance de la côte. Située non loin de Gjerrestad, le nom d'Abel n'y était pas inconnu, on se souvenait ncore du pasteur Sören Georg.

Crely y vivait depuis plus d'un an chez un industriel, M. Sa-el Smith, dont elle élevait les plus jeunes enfants. La situa-n y était douce; les jeunes filles de la maison, presque du ne âge qu'elle, étaient des amies; les mœurs patriarcales per-aient de recevoir comme un ami aussi le fiancé de la gou-nte.

el avait déjà passé chez M. Smith les vacances précédentes juillet 1828) et d'autres congés peut-être. Dans cet inté-ordial, il s'était vite fait aimer, adopter même, et il goû-oie, qu'il avait trop peu connue, de redevenir dans cette un enfant, avec le droit de remettre en d'autres mains les e sa vie, de laisser libre cours à sa gaieté, à ses désirs ion. Ses hôtes ont raconté qu'il aimait à vivre toujours nosphère familiale; il apportait avec lui, au salon ou lle à manger, ses grands cahiers ou son papier à lettre très fin qu'on appelait *papier ruine-poste*), et là, au

milieu des dames et des jeunes filles, il travaillait malgré le bruit des conversations. Souvent il quittait ses travaux, jouait, faisait avec passion une partie de cartes ou préparait quelque espièglerie; il dérobait un mouchoir dans une poche, brouillait les fils d'une boîte à ouvrage. On acceptait ces farces de la part de ce garçon de 27 ans qui désarmait toute colère par ses gestes contrits d'enfant pris en faute.

Dans le jour, quand le temps le permettait, il courait avec les gamins à travers les rues et, en hiver, montant avec eux sur les toits doucement inclinés des maisons basses, se laissait glisser dans les tas de neige.

N'aurait-on pas dit, à le voir ainsi, qu'il était encore le collégien de Gjerrestad?

Au mois de décembre, Abel quittait donc Christiania pour aller à Froland fêter la Noël. Voyageant en carriole au cœur de l'hiver sur la longue route qui suit le golfe, entre Christiania et Arendal, il souffrit du froid; quand le 19 il arriva à Froland, il était fatigué, fiévreux, atteint d'une bronchite.

Mais bientôt, après quelques jours de repos, il reprit sa gaieté et les habitudes qu'il aimait; ses hôtes perdirent toute inquiétude; ce ne semblait être qu'un rhume comme il en avait souvent.

La Noël passa, puis le jour de l'an; le mal était oublié.

Mais, dès le début de janvier, la toux reparut, et il sembla même qu'Abel perdît son insouciance d'enfant.

Les demoiselles Smith ont noté que, le 6 janvier, il s'isola pour travailler, ce qui ne lui arrivait jamais, et demeura longtemps seul dans sa chambre.

Or, de ce jour est datée la rédaction d'un court Mémoire

envoyé à Crelle. C'est, en deux pages, l'énoncé et la démonstration du théorème d'addition, celui qui sera bientôt le *théorème d'Abel* dans sa forme la plus générale; à la fin se trouvent ces lignes :

« Je me réserve de développer dans une autre occasion les nombreuses applications de ce théorème qui jetteront du jour sur la nature des fonctions transcendantes dont il s'agit. » (18).

Il faut se rappeler que ce théorème, qu'il rédigeait ici pour la troisième fois dans sa forme la plus générale, pour la dixième fois au moins si l'on tient compte des cas particuliers, n'avait pas encore été publié. Il allait être connu par ce court Mémoire ; ce que fit Abel dans ses quelques heures d'isolement devait avoir une importance capitale dans l'histoire des Mathématiques.

A voir les circonstances dans lesquelles il le fit, la pensée nous ient qu'instinctivement, avant de mourir, Abel a sauvé de son euvre cette admirable théorie qui menaçait d'être perdue. Mais ourquoi imaginer en lui de tels instincts? nous savons, par sa tre à Legendre, qu'il préparait un Mémoire sur ce théorème. urquoi ce Mémoire eût-il été une reproduction de celui de is dont il avait récemment rappelé l'existence? Non, ici aient se trouver de nouvelles applications, il ne s'agissait peut-plus de classer des fonctions par genre, mais, probablement, les s étudier selon leur espèce; l'exemple communiqué à e permet de le croire. Abel dans le développement de ses x était conduit à user de son théorème non plus comme util de classification, mais comme d'un puissant appareil tigation.

'isola, c'est sans doute qu'il avait promis à Crelle un tra- lui fallait une paix absolue pour faire sa rédaction. Trop

fatigué déjà, il ne put la poursuivre et livra seulement cette sublime fleur de son génie. Ce devait être son dernier ouvrage.

Il se préparait à quitter Froland, le 8 janvier; ce jour-là, il fut pris de frissons ininterrompus et dut s'aliter, remettant son départ; le 9 au matin, il eut des crachements de sang.

Son mal sembla d'abord s'apaiser : au bout de deux semaines un mieux sensible lui permit de se lever, de se remettre même au travail; de ce moment, datent quelques pages de notes ayant trait au *Précis*. Sa gaîté revenait; auprès de sa fiancée, plus inquiète que lui, il faisait des projets d'avenir : « Songe, Crely, disait-il, qu'à Berlin tu ne seras pas seulement Madame Abel, mais Madame *la professeur*. »

A la fin de janvier il se préparait au départ quand les crachements de sang recommencèrent, il dut s'aliter de nouveau; cette fois ses forces minées par la maladie et par une misère de trois années furent complètement abattues. Abel ne se releva plus. A partir du 15 février il lui fut impossible de remuer, et même d'écrire. Il reçut à ce moment une nouvelle de Legendre et ne put y répondre. Ce fut un affreux désespoir.

Il se vit très atteint; mais, comme tous les phtisiques, il comptait qu'avec le printemps, les premiers rayons de soleil il retrouverait ses forces. Il y avait des moments où il était heureux de se trouver dans une atmosphère amicale, auprès de sa fiancée; il lui arrivait même de se réjouir de certains événements : ses appointements de Docent étaient augmentés, Crelle assurait comme prochaine sa nomination à Berlin. — Rien ne donne l'impression du prolongement de notre vie comme de voir se préparer l'avenir! — quelquefois, pourtant, il avait peur et, regardant ses mains amai-

gries, il disait : « Je guérirai, n'est-ce pas, ce n'est pas vrai ce qu'on dit à Paris, que j'ai la phtisie. »

On ne sait pourquoi il accusait les Parisiens de cette diffamation.

Au bout d'un mois, les moments de lucidité devinrent plus rares; la fièvre l'abattit. Il sembla qu'alors toute sa pensée s'absorbât dans les préoccupations qui avaient fait sa vie; il ne parla plus que des Mathématiques. Il parlait aussi des savants qu'il avait connus, et d'autres qu'il n'avait jamais vus que dans son délire. « Tu sais, Jacobi, disait-il à sa fiancée, il est le seul homme qui m'ait compris. » Les choses mathématiques lui semblaient alors si claires qu'il croyait pouvoir faire entendre à tous la portée de ses découvertes. Pour ceux qui l'écoutaient, ses phrases étaient des assemblages de mots incohérents; Abel se sentant incompris se désespérait. Quinze jours avant sa mort, l dit à Hannah Smith, femme d'un marin : « Si je vis encore n mois, je deviendrai célèbre aux yeux de ton mari et de tous les arins. »

A la fin de mars, il eut encore des instants de lucidité, plus ibles que les moments de délire. Crely, qui ne le quittait pas, lant posséder à elle seule ses derniers jours de vie, ne pouvait orter la vue de son désespoir; une des demoiselles Smith la laçait alors près du malade; à l'une d'elles, Abel dit ses ders volontés : Il désirait que Keilhau épousât Crely. « Elle pas belle, dit-il, elle a les cheveux roux et des taches de ur, mais c'est une femme admirable. » Il laissait à oë le soin de sa famille.

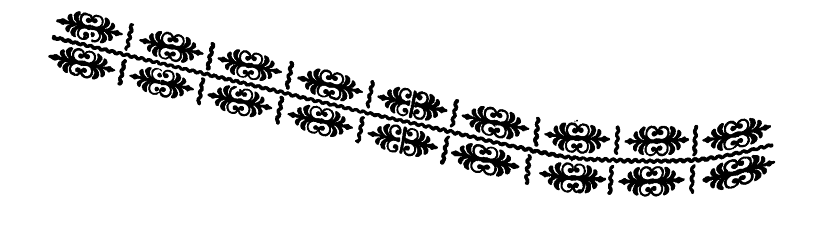
avril à 4h du matin, après une terrible agonie, il mourut bras de sa fiancée.

Huit jours après, le 14, il fut inhumé près de l'église de Froland, dans le lieu de sépulture de la famille Smith. Ce jour-là une tempête de neige s'abattit sur la région. Tous les habitants de la ville minière et des environs suivirent pourtant son cercueil; ils venaient accompagner à sa dernière demeure celui qui n'était pour eux que le fils du pasteur S.-G. Abel. Aucun ne savait quel devoir plus sacré il accomplissait.

*
* *

Quelques années après, Keilhau vint à Froland; il y vit le tombeau d'Abel non enclos, comme abandonné. Une souscription fut faite pour élever une sépulture plus digne. Il y eut huit souscripteurs : Treschow, Mme Hansteen, Michel Schjeldrup, Holmboë, Rasmussen, Ajort, Boeck, Keilhau. Il faut écrire le nom de ces êtres qui tous ont été mêlés à la vie d'Abel, qui tous, à des degrés divers, ont su satisfaire au plus impérieux de ses besoins, car ils l'ont aimé. Ce sont ses amis qui ont élevé son tombeau. Aucun inconnu n'a participé à ce souvenir.





CHAPITRE IV.

QUELQUES RÉFLEXIONS A PROPOS D'ABEL.

Quand, en France et en Allemagne, on sut la triste fin d'Abel, il n'y eut pas parmi les mathématiciens ce sentiment de doulou-reuse angoisse qu'aurait dû faire naître la disparition d'une si merveilleuse intelligence, et l'on pourrait compter ceux qui por-èrent profondément dans leur âme de savant le deuil de cette ort : Legendre plaignit le jeune homme qui, pensait-il, mar-ait dans la voie qu'il avait tracée. Gauss et Shumacher eurent science de la perte que la Science venait de faire; d'autres hématiciens le comprirent aussi, qui avaient suivi le déve-ement des études sur les fonctions elliptiques; mais, tous ne lèrent voir qu'un côté de l'œuvre d'Abel, et, seul, peut-être, i imagina ce qu'aurait été, s'il avait vécu, celui qui venait ourir; seul, il sentit tout ce que contenait le théorème tion, et, plus perspicace que Legendre, ayant lu l'allusion u Mémoire de Paris, il éleva la voix pour que ce Mémoire s au jour.

gtemps encore les grandes théories abéliennes devaient er inconnues et il ne faudrait pas, d'après quelques mots s, de Shumacher, de Crelle, de Legendre, juger que le la mort du jeune Norvégien ait eu, comme on l'a dit,

un retentissement très grand dans le monde. Il se passa deux ans (juillet 1830) avant que l'Académie des Sciences de Paris n'accordât un prix à ses œuvres, encore ce prix fut-il partagé avec Jacobi, ce qui marque l'esprit dans lequel il était décerné ; enfin, il fallut attendre treize ans avant que le Mémoire sur le théorème d'addition fût retrouvé. Personne, hormis le jeune mathématicien allemand, ne semblait comprendre l'intérêt de cette recherche.

Mais dès que, dans un public moins restreint, le nom d'Abel commença d'être connu, on apprit sa vie malheureuse, et cette destinée misérable mit sur son nom une auréole de gloire, mieux que ne l'auraient pu faire les décisions des Académies, car, si les hommes savent rarement admirer, ils aiment, en revanche, à plaindre un génie malheureux et à poursuivre de diatribes ceux qu'ils peuvent accuser d'avoir causé son malheur.

En 1843, une Notice sur Abel parut dans la Biographie de Michaud, on y lisait ceci :

« Nous élevons la voix pour demander compte à ces hommes égoïstes qui, par leur indifférence, ont contribué à abréger les jours d'Abel, pour leur demander compte, disons-nous, de toutes les découvertes que sa mort nous a ravies et dont quelques-unes qu'il a énoncées sans démonstration frappent d'étonnement ceux qui peuvent en comprendre l'importance. Était-ce bien le temps au XIX[e] siècle de renouveler la mort de Camoëns... »

Joint à cette rhétorique, le nom d'Abel atteignit à cette première sanction de la gloire qu'est un article de dictionnaire.

Si nous donnons ici le texte même de cet article, c'est qu'il amena une réponse d'Arago, qui, alors Secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences, tenta de disculper ses collègues et

leurs prédécesseurs. C'est le plus sûr renseignement que nous possédions sur l'attitude qu'on eut vis-à-vis d'Abel. Il ne faut pas s'attacher à la forme âpre de ce plaidoyer *pro domo* dans lequel Arago parvient, grâce à une étrange critique des textes, à la conclusion suivante : « Abel, dans l'aisance et plein de gloire, mourut au moment où il allait se marier » ; ce qu'il faut retenir, c'est le passage suivant qui nous renseigne sur l'accueil fait au Mémoire présenté à l'Institut :

« J'ouvre, dit Arago, le procès-verbal de cette séance (30 octobre 1826)... et je trouve :

« On lit un Mémoire de M. Abel, Norvégien, sur une pro-
» priété générale d'une classe très étendue de fonctions trans-
» cendantes... »

« Ainsi, continue-t-il, le Mémoire qui venait d'être fini le
4 octobre, non seulement fut présenté à l'Académie 6 jours
rès, mais le Secrétaire perpétuel, Fourier, en lut en séance
t ce qui, dans un travail hérissé de formules, était de nature
re lu publiquement... »

eportons-nous au Mémoire; nous voyons que la lecture
ourier porta certainement sur l'exposition et l'énoncé du
ème; et, puisque ni Legendre, ni Cauchy, qui eurent à l'étu-
n qualité de commissaires, ne reparlèrent de ce Mémoire,
onc que personne à l'Académie n'en comprit le sens ; et
lus, il faut remarquer que dans la Note d'Arago, écrite
t ans plus tard, il ne se rencontre pas une phrase, pas une
pour marquer que ce théorème ait été considéré depuis
une découverte capitale. On dira peut-être à cela qu'Arago
ement astronome et physicien; mais on ne peut croire
Secrétaire perpétuel fût si indifférent aux progrès de

l'analyse pure qu'il ignorât un fait aussi important que la prise en considération du théorème d'Abel.

Ce n'est donc ni de l'indifférence, ni de l'égoïsme qu'eut à souffrir Abel; et, si les savants furent coupables envers lui, ce fut par suite de leur ignorance ou plutôt de leur incompréhension.

Cette incompréhension s'explique si l'on se rappelle ce qu'était en 1826 la science mathématique : s'il est impossible d'en faire ici un tableau complet, du moins peut-on en quelques lignes indiquer quelle était sa tendance.

Il faut dans la Science distinguer deux choses : le but et la méthode. Le but semblait être de développer l'analyse selon les nécessités de la Mécanique, de l'Astronomie et de la Physique. Depuis qu'au XVIIIe siècle Euler, d'Alembert, les Bernoulli avaient montré quel admirable outil d'investigation était le calcul différentiel appliqué à l'étude des phénomènes naturels, depuis que Lagrange avait, par sa Mécanique analytique, systématisé la méthode de recherche, une admirable école s'était formée qui avait eu sa plus haute expression dans Laplace, l'immortel auteur de la Mécanique céleste; auprès de lui les mathématiciens comme Poisson, Ampère, Fourier avaient abandonné les recherches de pure abstraction pour étudier les phénomènes physiques, l'élasticité, la chaleur, l'électricité, l'optique. La Mathématique n'était plus pour eux une science existant par elle-même, c'était un instrument de recherche; le but de ces géomètres semblait être d'obtenir par l'analyse des résultats numériques qui devaient s'appliquer à des expériences ou les vérifier. Quant à leur méthode, elle était purement analytique. La *Mécanique* de Lagrange avait eu pour effet l'abandon

des méthodes intuitives de Newton et même celles d'Euler; et il semblait que, toujours, par des calculs algébriques soigneusement et rationnellement conduits, on dût arriver à résoudre, au moins par approximation, les problèmes mis en équation. Quelques personnes pouvaient croire qu'on était enfin parvenu à une Mathématique universelle.

Peu nombreux étaient ceux qui considéraient la science mathématique en elle-même, ce qu'on appelle la science de spéculation. Elle avait eu des représentants illustres : Lagrange, le génie le plus intelligent et le plus divers de l'époque, et Gauss; et, maintenant, entre autres géomètres, Legendre et Cauchy. Legendre avait refait la Géométrie élémentaire, étudié la théorie des nombres et celle des intégrales elliptiques; son œuvre était isolée parmi les travaux de ses collègues et il ne semblait pas qu'il eût fait des disciples. Quant à Cauchy, qui publiait ses admirables Mémoires sur les intégrales prises entre des limites imaginaires, il avait su faire voir, par de nombreuses applications à l'expression en termes finis de diverses séries et de nombreuses intégrales définies, que ses études, bien qu'abstraites, bien que nées d'un travail d'intuition, avaient une portée pratique; mais il ne semble pas que l'on rendît pleinement justice à son génie, et, malgré la nouvelle impulsion qu'il donnait à la Science, les géomètres étaient encore, pour la plupart, dans ce sentiment, exprimé soixante ans plus tôt par d'Alembert, que l'Analyse ne pouvait se développer d'elle-même et qu'elle n'avait de vie que par son application à la Mécanique.

C'est à cette école de *Mécanistes* que vint se heurter le génie d'Abel; tout était différent en lui, la tendance, la méthode, l'esprit même. Ce qu'il apportait était justement une science qui,

née d'une intuition merveilleuse de la pure pensée, n'avait d'autre appui, d'autre nourriture, que cette pensée même; elle ne présentait ni base concrète, ni représentation géométrique, ni application tangible; et, si son auteur pensait qu'elle avait quelques racines dans le passé, ces racines étaient si ténues que d'autres que lui ne pouvaient les percevoir. Et cela, qui est vrai de toute son œuvre, l'est surtout du Mémoire qu'il présentait à l'Institut. Ce Mémoire ne pouvait attirer l'attention par sa valeur profonde, il ne le pouvait non plus par ses détails. Si Abel avait présenté un travail sur les fonctions elliptiques, sujet déjà connu, peut-être l'eût-on écouté. S'il avait, comme Jacobi le fit plus tard, appliqué ces fonctions à des équations de la dynamique, sans doute eût-il été bientôt célèbre. Mais, naïvement, il offrit ce qu'il savait être sa plus pure création, et des hommes que rien ne préparait à entendre un tel sujet ne comprirent pas; peut-être même ne cherchèrent-ils pas ce qu'il y avait à comprendre, car, à un moment où, à l'aide de l'analyse, ils étudiaient les phénomènes les plus mystérieux de la nature, les géomètres ne voyaient pas d'intérêt à une classification de fonctions transcendantes. On ne doit pas s'en étonner : pour qu'ils comprissent la portée du théorème d'Abel, il leur aurait fallu faire un grand effort, non seulement d'attention, mais d'imagination; et, d'ailleurs, qu'aujourd'hui encore, après quatre-vingts ans, un étudiant, dont l'instruction n'a porté que sur les théories nécessaires à l'étude de la Mécanique rationnelle, ouvre le Mémoire de Paris, il est douteux qu'il en comprenne la portée et qu'il en continue la lecture.

*
* *

Donc Abel fut incompris; il en sentait bien la cause, et il écrivait à Holmboë :

« Il (Cauchy) est le seul qui travaille aujourd'hui dans les Mathématiques pures; Poisson, Fourier, Ampère, etc. ne s'occupent absolument que de magnétisme et d'autres affaires de Physique... » (19).

Et quand on songe à l'accueil qu'il eût trouvé en Norvège si son Mémoire avait été estimé à Paris comme il devait l'être, on ne peut s'empêcher de penser que l'échec qu'il subit alors fut en grande partie cause du malheur de sa vie. Car, s'il n'eut à souffrir ni de l'égoïsme, ni de la méchanceté, ni de la jalousie des hommes, s'il est vrai qu'il fut lui-même l'artisan de ses misères, par son enfantillage, sa timidité, le désordre qu'il mit dans l'administration de ses faibles ressources, par son besoin maladif e retourner au pays natal, peut-être aussi par sa défiance envers auss, il est certain aussi que la protection d'un des grands géoètres de France ou d'Allemagne eût modifié sa carrière. Mais pouvait le protéger? Legendre? il était trop vieux; Cauchy? absorbé dans ses immenses travaux; Gauss? il ne sut rien de a vie du jeune Norvégien (20); et, quand Jacobi comprit ce ait Abel, il était trop tard pour que rien pût être changé à stinée.

autre mathématicien s'attacha à l'œuvre d'Abel; il avait uit ans quand Abel mourut, il devait mourir lui-même ns plus tard, ignoré et incompris, c'était Galois. Comme l s'occupa de la résolution algébrique des équations, rai par des méthodes tout autres — et, dans l'étude des es à différentielle algébrique, il parvint à généraliser des exprimés dans le dernier ouvrage d'Abel, le *Précis* (21).

. . . .

Cette communauté dans les préoccupations, la même mort prématurée, sont des analogies qui lient dans notre mémoire les noms d'Abel et de Galois; et, pourtant, malgré cette similitude, on ne saurait joindre dans un même sentiment deux génies plus dissemblables, deux œuvres plus différentes.

Sans insister sur l'opposition qu'il est facile d'établir entre leur caractère, — Abel, doux, timide, puérilement en dehors de tous les événements extérieurs; Galois, ardent révolutionnaire, passionné, irascible, mourant dans un duel pour une histoire de fille, — il faudrait tâcher de voir comment la forme de leurs ouvrages se ressent de leur nature.

Qu'on lise les Mémoires mathématiques de l'un et de l'autre, et l'on percevra immédiatement quelle empreinte cette nature peut imprimer à des travaux qui semblent créés indépendamment de la sensibilité.

Les Mémoires de Galois sont ardus, rébarbatifs, incompréhensibles même; si, avant de les lire, — non seulement la lettre à Auguste Chevallier, mais les travaux antérieurs, — on ignore complètement la théorie des groupes de substitutions, on est mis violemment en contact avec l'exposé âpre d'une science nouvelle à laquelle on ne trouve aucun lien avec des travaux passés. Car il faut noter que si les idées de Galois ne sont pas absolument nouvelles (la théorie des groupes revient au moins à Cauchy, l'idée de la résolvante à Abel, si ce n'est à Lagrange), jamais, — sauf le nom d'Abel une fois prononcé, — l'auteur n'indique qu'il ait puisé à des sources. Et qu'on ne croie pas qu'il agit ainsi par orgueil, la raison est plus profonde : Galois agit en révolutionnaire, il construit des théories mathématiques,

comme il construirait des théories sociales, et, s'il fait des emprunts au passé, il oublie, il désire peut-être oublier qu'il fait ces emprunts. Dans la vie, il traite d'ailleurs les mathématiciens comme des ennemis politiques et refuse toute explication à des gens qui, pense-t-il, sont de mentalité trop différente pour le comprendre.

Tout autre est Abel; le début de chacun de ses Mémoires est précédé d'une introduction qui marque en quoi il se rattache aux travaux des grands géomètres ses prédécesseurs. Cette façon d'agir est peut-être née de la lecture des ouvrages de Lagrange, dont il semble avoir voulu imiter la forme classique, mais aussi, elle est bien dans sa nature. S'il crée une science nouvelle, c'est, pour ainsi dire, inconsciemment; il reste profondément traditionnaliste et ses théories ne sont, dans leur principe, que des généralisations de théories connues; enfin, on l'a vu, quand Crelle lui demande des détails sur une démonstration, il se donne tout le mal possible pour se faire comprendre.

Aussi, si ces deux jeunes mathématiciens furent incompris, si l'un et l'autre eurent à souffrir de l'ordre des préoccupations des géomètres, il faut avouer que, pour Galois, il se joignait à cette cause profonde d'autres causes presque matérielles. Ses Mémoires semblaient être volontairement incompréhensibles; pour en saisir le sens, il ne suffisait pas d'y appliquer sa pensée, il fallait en démonter le contenu, puis le reconstruire. Pour ceux d'Abel, au contraire, il aurait suffi peut-être d'une attention un peu soutenue; ils étaient clairs, simples, pour qui aurait voulu s'attacher à en comprendre le sens. L'œuvre de Galois dut attendre trente années avant qu'un mathématicien la refît. Abel, de son vivant, avait trouvé un interprète.

*
* *

Jacobi prit en main sa glorification. Ce fut lui qui baptisa les fonctions à différentielle algébriques du nom de *Fonctions abéliennes,* et le théorème par lequel on les étudiait, de celui de *Théorème d'Abel.* Il devait, a-t-on dit, montrer au monde ce qu'Abel avait été.

Il serait puéril de vouloir résumer en quelques lignes ce que devinrent alors les théories abéliennes. Ce serait résumer l'œuvre de Jacobi, de Riemann, d'Hermite, d'Halphen, de tant d'autres qui devaient suivre la voie indiquée par le jeune Norvégien. L'introduction des fonctions abéliennes a été la plus grande révolution qu'ait subie l'Analyse au XIX[e] siècle. Mais ce n'est pas seulement le théorème d'Abel et les fonctions elliptiques dont il faut admirer le sort. Il n'est pas, je crois, un Mémoire écrit par Abel qui n'ait eu un prolongement dans l'histoire des Mathématiques; cequ'il avait rédigé de la théorie des équations servit de base aux études de Kroneker qui devait, quarante ans après Abel, parvenir à des résultats qu'Abel avait connus, comme on peut le vérifier en interprétant le sens de plusieurs pages de calculs notés sur ses cahiers de brouillon; ses théorèmes sur la convergence des séries eurent leur place à côté des travaux de Cauchy; un travail même qu'il avait fait avant son départ pour l'Europe sur l'échange du paramètre et de l'argument fut repris par Jacobi. « Abel, disait, je crois, Hermite, a laissé aux mathématiciens de quoi travailler pendant cent cinquante ans. »

Et peut-être avons-nous perdu bien des travaux d'Abel; on

croirait que le sort qui avait poursuivi sa vie s'attacha à détruire une partie de son œuvre. Le Mémoire de Paris fut entre les mains de l'éditeur assez de temps pour être imprimé; puis il disparut, et on ne le revit jamais; les papiers de Crelle furent dispersés, et l'on ne put en retrouver trace; enfin un incendie détruisit la plus grande partie des papiers de Holmboë. Mais que sont d'ailleurs ces Notes égarées, auprès de ce qu'Abel emporta dans la tombe! Quand on voit tous ces travaux à peine commencés et pourtant déjà conçus dans leur ensemble, le *Précis*, ébauche d'un grand ouvrage projeté, le *Mémoire sur les équations*, le *Second Mémoire sur les fonctions elliptiques*, le *Traité sur les séries*, enfin le *Mémoire sur le théorème d'addition*, cette page écrite à Froland, on songe avec une émotion profonde que quelques mois d'existence auraient permis à Abel d'achever son œuvre.

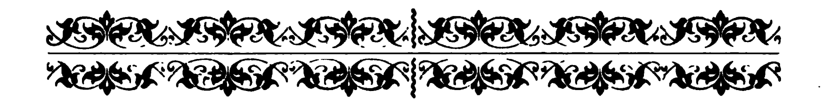
Et pourtant, un génie comme Abel, quel qu'eût été le moment de sa mort, aurait laissé des travaux incomplets : il n'aurait pas achevé son œuvre parce que son œuvre ne pouvait être finie; s'il eût vécu, il aurait seulement été plus avant dans ses découvertes, mais, à quelque point qu'il en fût parvenu, il serait mort encore trop tôt. Il était de ces hommes qui semblent avoir pour mission de donner une impulsion nouvelle aux travaux de pensée pure : quand on considère l'ensemble de son existence, la misère de sa vie, l'immensité de son génie, on ne peut s'empêcher d'avoir un sentiment mystique. Abel prend place dans la lignée des Socrate, des Archimède, des Descartes, des Spinoza, de ceux qui montrèrent à l'humanité la puissance créatrice de l'intelligence repliée sur elle-même. La science de pure spéculation est, comme la Philosophie, une création de ces hommes,

car, contrairement aux sciences physiques, elle ne peut s'accroître, se renouveler que par des à-coups de génie.

La science physique (en y comprenant la Mécanique rationnelle), s'appuie sur des objets, sur des faits, elle s'accroîtra toujours, lentement peut-être, mais sûrement; entre des faits expérimentaux une coordination sera toujours possible à établir, et l'intervention des grands esprits se marquera par une vue plus générale, plus simple, dans ces coordinations. La science pure, au contraire, n'ayant aucun appui concret, ne peut se passer du secours d'une intelligence créatrice, et, si, pendant un long intervalle de temps, une telle intelligence géniale n'intervient pas, cette science peut disparaitre; non pas que les problèmes posés soient épuisés, mais parce que les hommes n'y trouveront plus d'intérêt.

En revanche, il est possible de penser que, dans plusieurs milliers d'années, les savants considèrent les sciences physiques comme finies; ce sera le jour où, ayant établi entre les divers phénomènes de la nature des coordinations très simples, ils n'imagineront pas qu'ils puissent aller plus loin par une vue purement extérieure des choses; tandis que la science pure, créée par la pensée, devra vivre autant que la pensée elle-même, se transformant avec elle, et, abandonnant même, peut-être, un jour, la forme brutale du syllogisme, pour une autre qui soit en accord plus intime avec le sentiment de la vie (22).





NOTES.

NOTE 1.

Cette opinion que partage M. Liard a été combattue par M. P. Boutroux. Si l'on s'en tient à l'examen de la *Géométrie* de Descartes, les deux opinions sont également justifiées; on y trouve une résolution géométrique des équations (Algèbre géométrique) et la recherche algébrique de la tangente (Géométrie analytique). Mais, si l'on pense à ce qu'était la Science algébrique à cette époque auprès de la Science géométrique, on est conduit, je crois, à se rattacher à l'opinion de M. Liard.

NOTE 2.

« Christine Kemp était fille d'un chaudronnier de Copenhague. C'était
» une jeune fille vive et courageuse, désireuse de s'élever. De bonne heure,
» elle avait dû quitter la maison paternelle pour gagner son pain. »

Voir Bjerknes, *N.-H. Abel.* On trouve aussi à cet endroit (p. 224) un autre récit de la première rencontre d'Abel avec sa fiancée.

NOTE 3.

Voici quelques définitions touchant les intégrales elliptiques. Elles sont définies par l'équation différentielle

$$dy\,P\sqrt{R(x)} + Q\,dx = 0, \qquad R = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e,$$

P et Q sont des fonctions entières de x.

Par réduction à l'aide des fonctions logarithmiques, on n'obtient que trois transcendantes nouvelles :

Transcendante de première espèce

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{R}}.$$

Transcendante de deuxième espèce

$$\int_{x_0}^{x} \frac{x^2\,dx}{\sqrt{R}}.$$

Transcendante de troisième espèce

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}.$$

Dans les intégrales de troisième espèce, a se nomme le *paramètre* et x l'*argument*.

Réduire les intégrales par rapport au paramètre, c'est exprimer une intégrale de paramètre a par une autre de paramètre a'; on ne peut le faire qu'en introduisant une intégrale de première espèce.

Si l'on écrit le polynome $R = (1 - x^2)(1 - c^2 x^2)$, la quantité c est le *module;* on voit immédiatement ce qu'on nomme *réduction* par rapport au module.

La *transformation* dans les intégrales de première espèce est la résolution de l'équation suivante :

$$\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-e^2x^2)}} = K\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-e_1^2y^2)}},$$

K étant une constante.

On a été conduit très vite à considérer ce problème en tâchant de former des *Tables* de valeur des intégrales elliptiques comme on avait des Tables de sinus.

Euler, le premier, a intégré l'équation

$$\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-e^2x^2)}} = \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-c^2y^2)}}.$$

L'intégrale est une équation du second degré en x et y.

Je dis plus bas que la décomposition en facteurs de la forme $P^2 - Q^2R$ tient une grande place dans la théorie des intégrales elliptiques. Comme

— afin de ne pas multiplier les explications — je n'en parlerai plus, il n'est pas inutile de dire ici quelle est son importance :

Soit

$$\psi(x) = \int^{x} \frac{f(x)\,dx}{(x-a)\sqrt{R(x)}};$$

soit

$$P^2 - Q^2R = A(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_\mu),$$

on a

$$\pm\psi(x_1) \pm \psi(x_2) \pm \ldots \pm \psi(x_\mu) = u + \alpha \log v + C,$$

u et v étant des fonctions rationnelles de a (le paramètre) et de $\sqrt{R(a)}$, C une constante. C'est donc là le *Théorème d'addition* appliqué aux fonctions elliptiques.

Peut-être est-ce sous cette forme qu'Abel le démontra pour la première fois. Ce théorème se retrouve sous cette forme dans un Mémoire écrit à la fin de sa vie (*voir* p. 106).

Plus tard, ce fut encore sous cette forme qu'il l'appliqua aux fonctions inverses.

Soit $x = \lambda(\theta)$ la fonction inverse d'une intégrale elliptique de première espèce; il est évident que l'on a

$$\pm\theta_1 \pm \theta_2 \pm \ldots \pm \theta_\mu = \text{const.}$$

(*voir* p. 108).

NOTE 4.

Je ne veux pas m'appesantir sur le sentiment de la *cause;* il faudrait bien des développements pour le préciser; je veux noter seulement ce qu'il y a de vicieux dans le caractère exprimé dans le 2° : que A est la cause de B parce qu'on peut généraliser A en A', puis obtenir B' généralisation de B; ce qu'on veut obtenir c'est B', donc on peut généraliser n'importe quel résultat ayant donné B. Mais où il y a cercle vicieux dans l'expression, il n'y a pas forcément cercle vicieux dans le sentiment, et le cercle vicieux dans l'expression est peut-être nécessaire pour que certaines expressions puissent se former.

NOTE 5.

En généralisant l'équation différentielle, puis l'équation algébrique, il semble qu'Abel soit conduit à considérer deux classes absolument diffé-

rentes de fonctions; mais il devait s'apercevoir un jour que la seconde classe rentrait dans la première; on trouve, en effet, sur un cahier de 1827 ce théorème :

Toute fonction algébrique déterminée par une équation de degré m satisfait à une équation différentielle linéaire de degré m — 1.

N'est-on pas en droit de penser que, suivant sa méthode, Abel, s'il eût vécu, aurait généralisé le théorème d'addition pour les fonctions répondant à l'équation différentielle, lesquelles sont plus générales que celles répondant à l'équation algébrique ?

NOTE 6.

On peut se demander si Abel était bien maître de la démonstration complète de son théorème, c'est-à-dire de la partie importante de cette démonstration concernant le nombre des intégrales indépendantes.

Soit μ le nombre des intégrales à sommer, n le degré de l'équation $s = 0$; on sait que l'on obtient cette équation s par l'élimination de y entre les deux équations

$$(1) \qquad a_0 y^m + a_1 y^{m-1} + a_2 y^{m-2} = 0,$$

$$(2) \qquad b_0 y^{m-1} + b_1 y^{m-2} = 0,$$

a_0, b_0, ... étant des fonctions entières de x. La première de ces équations est celle qui détermine la fonction y (on l'appelle, en prenant l'image géométrique, la *courbe fixe*); la seconde est arbitraire (courbe mobile) et doit seulement être de degré $m - 1$ en y. Le résultat, important pour Abel, est : que, quel que soit le nombre μ, on peut choisir l'équation (2), de telle sorte que $n - \mu$ soit indépendant de μ, ce nombre $n - \mu$ étant absolument défini par la forme de l'équation (1). Or, il ne fait pas cette démonstration assez délicate.

« Il n'est pas difficile de se convaincre, dit-il seulement, que, quel que » soit μ, on peut faire en sorte que $n - \mu$ soit indépendant de μ. »

Que signifient ces mots : *Il n'est pas difficile de se convaincre.* Est-ce qu'Abel est convaincu de la justesse du résultat sans avoir fait une démonstration absolument décisive?

On trouve dans un autre Mémoire cette même forme d'affirmation en un lieu où l'on préférerait une démonstration. C'est dans le *Traité des fonctions elliptiques* dont nous avons parlé. Abel dit aussi qu'*il n'est pas*

difficile de se convaincre qu'une fonction elliptique intégrable en logarithmes a forcément la forme suivante :

$$\sum \mathrm{A}k \log \frac{\mathrm{P}k + \mathrm{Q}k\sqrt{\mathrm{R}}}{\mathrm{P}k - \mathrm{Q}k\sqrt{\mathrm{R}}}.$$

Une autre remarque à faire est la suivante :

Dans son Mémoire, Abel ne suppose pas que les racines de l'équation $s = 0$ soient des racines réelles, donc l'expression

$$\int_{x_0}^{x} f(x, y)\, dx$$

peut être une intégrale prise entre des limites imaginaires.

Or, Abel connaissait-il ces sortes de fonctions? Le premier qui les ait considérées est Cauchy, dans un Mémoire daté d'octobre 1822. Il est peu probable qu'Abel ait connu ce Mémoire.

Il y a donc deux hypothèses possibles : ou bien il avait lui-même défini l'expression

$$\int_{x_0}^{x} f(x)\, dx,$$

x étant imaginaire, ou bien il avait démontré son théorème sans avoir fait cette définition. Or, on le voit, à Paris, étudier avec soin un Mémoire de Cauchy de 1825; je pencherais donc pour la seconde hypothèse. Elle n'est pas absurde, étant donnée la façon dont dut être faite cette découverte; elle expliquerait d'ailleurs qu'Abel ait tardé si longtemps avant de la publier.

NOTE 7.

Il ne faut pas faire de confusion entre le sens de ces deux termes que l'on rencontrera souvent : expression algébrique et fonction algébrique. Une expression algébrique $y = f(x)$ est une expression formée de radicaux en nombre fini portant sur des fonctions rationnelles de x; une fonction algébrique $y = \varphi(x)$ est une racine d'une équation entière en y et x. Toute expression algébrique est en même temps une fonction algébrique, mais une fonction algébrique n'est représentable par une expression algébrique que dans le cas où l'équation qui la détermine est résoluble par radicaux. — Il n'est pas inutile de garder contre cette confusion les lec-

teurs non avertis. — Notons que la distinction n'est pas du tout du même ordre entre les termes : expression analytique et fonction analytique.

NOTE 8.

Des Mémoires dont parle alors Abel, il n'a paru que quelques-uns; on ne sait ce qu'étaient les autres.

NOTE 9.

Les renseignements sur les brouillons d'Abel ont été pris dans l'analyse de ces brouillons qui se trouve dans l'édition faite par S. Lie des *Œuvres* (Christiania et Paris, 1881). On s'est servi également de l'analyse qui se rencontre dans le *Mémorial du Centenaire*. Étant donné que nous n'avons pu voir les textes, nous nous sommes complètement soumis aux interprétations qu'ont données les auteurs des analyses, non seulement en ce qui concerne le sens du texte, mais aussi au sujet de l'époque où il fut écrit. Pourtant, qu'on me permette une remarque au sujet du cahier marqué B, qui est considéré comme écrit à Christiania, les problèmes dont s'occupe Abel sont justement ceux dont il parle dans une lettre de Berlin. Il y aurait là un point à vérifier. Je n'ai, d'ailleurs, pas tenu compte de ce fait et j'ai accepté l'interprétation de Sylow et Lie.

NOTE 10.

Voici le début de ce Mémoire, début qui, probablement, fut lu par Fourier en séance publique, le 30 octobre 1826, à l'Institut, et que l'on ne comprit pas.

MÉMOIRE SUR UNE PROPRIÉTÉ GÉNÉRALE D'UNE CLASSE TRÈS ÉTENDUE DE FONCTIONS TRANSCENDANTES.

Les fonctions transcendantes considérées jusqu'à présent par les géomètres sont en très petit nombre. Presque toute la théorie

des fonctions transcendantes se réduit à celle des fonctions logarithmiques, exponentielles et circulaires, fonctions qui, dans le fond, ne forment qu'une seule espèce. Ce n'est que dans les derniers temps qu'on a aussi commencé à considérer quelques autres fonctions. Parmi celles-ci, les transcendantes elliptiques, dont M. Legendre a développé tant de propriétés remarquables et élégantes, tiennent le premier rang. L'auteur a considéré, dans le Mémoire qu'il a l'honneur de présenter à l'Académie, une classe très étendue de fonctions, savoir : toutes celles dont les dérivées peuvent être exprimées au moyen d'équations algébriques, dont tous les coefficients sont fonctions rationnelles d'une même variable, et il a trouvé pour ces fonctions des propriétés analogues à celles des fonctions logarithmiques et elliptiques.

Une fonction dont la dérivée est rationnelle a, comme on le sait, la propriété qu'on peut exprimer la somme d'un nombre quelconque de semblables fonctions par une fonction algébrique et logarithmique, quelles que soient d'ailleurs les variables de ces fonctions. De même une fonction elliptique quelconque, c'est-à-dire une fonction dont la dérivée ne contient d'autre irrationnalité qu'un radical carré, sous lequel la variable ne passe pas le quatrième degré, aura encore la propriété qu'on peut exprimer une somme quelconque de semblables fonctions par une fonction algébrique et logarithmique, pourvu qu'on établisse entre les variables de ces fonctions une certaine relation algébrique. Cette analogie entre les propriétés de ces fonctions a conduit l'auteur à chercher s'il ne serait pas possible de trouver des propriétés analogues de fonctions plus générales et il parvenu au théorème suivant :

Si l'on a plusieurs fonctions algébriques dont les dérivées peuvent être racines d'une même équation algébrique, *dont tous les coefficients sont des fonctions rationnelles d'une même variable, on peut toujours exprimer la somme d'un nombre quelconque de semblables fonctions par une fonction algébrique et logarithmique pourvu que l'on établisse entre les variables des fonctions en question un certain nombre de relations algébriques.*

Le nombre de ces relations ne dépend nullement du nombre des fonctions, mais seulement de la nature des fonctions particulières qu'on considère. Ainsi, par exemple, pour une fonction elliptique, ce nombre est 1; pour une fonction dont la dérivée ne contient d'autre irrationnalité qu'un radical du second degré sans lequel la variable ne passe pas le cinquième ou le sixième degré, le nombre des relations nécessaires est de deux, et ainsi de suite.

On en déduit encore le théorème suivant :

On peut toujours exprimer la somme d'un nombre donné de fonctions qui sont multipliées chacune par un nombre rationnel et dont les variables sont arbitraires, par une somme semblable en nombre déterminé de fonctions dont les variables sont des fonctions algébriques des variables des fonctions données.

A la fin du Mémoire, on donne l'application de la théorie à une classe particulière de fonctions, savoir à celles qui sont exprimées comme intégrales de formules différentielles qui ne contiennent d'autre irrationnalité qu'un radical quelconque.

NOTE 11.

Voici un autre fragment d'une lettre adressée à M[me] Hansteen (Berlin, mars 1827; lettre citée) :

« ... Je suis maintenant ici à Berlin, et j'en suis heureux,
» car les Français ne me plaisent pas, ce sont des gens froids et
» prosaïques. Ils tranchent toutes les choses possibles de la même
» manière; ils parlent avec la même gravité ou la même légèreté
» des sujets les plus sérieux comme les plus futiles. Aucune inti-
» mité chez eux. Un Français a des relations presque aussi bonnes
» avec tout le monde. D'affreux égoïstes. S'ils entendent dire
» que les étrangers ont quelque chose qu'ils n'ont pas, ils
» s'étonnent et ils disent « diable », et c'est ainsi qu'ils s'étonnent
» de tout. Et puis le cher sexe féminin. Elles sont gentilles, si
» câlines, et s'habillent si bien, mais « voilà tout ». La modestie
» et la timidité, que les hommes aiment tant chez les femmes,
» leur font, certes, grandement défaut. Les Français le disent
» eux-mêmes. Ils disent : « Les étrangères sont plus modestes
» que les Françaises » ....»

Les mots entre guillemets sont écrits en français, le reste en norvégien.

NOTE 12.

Ne trouve-t-on pas dans ces Notes rapides qui cherchent à caractériser une physionomie, quelque chose du sentiment qui lui fait chercher la cause d'une vérité mathématique?

NOTE 13.

Nous n'avons pas considéré ici la question de priorité entre Abel et Jacobi. Cela n'avait pas à être fait, puisque nous étudions ce qu'étaient les choses pour Abel. Sur la question de priorité, on lira de très belles études dans le livre de M. Bjerknes. Je sais qu'on a combattu ses raisonnements en faveur d'Abel; il est vrai qu'ils ne sont pas absolument impartiaux, et le lecteur verra facilement par où ils pèchent. Mais il faut se garder d'en faire un grief à l'auteur; ce qui fait la beauté de son livre, c'est le sentiment d'affection pour son compatriote, dans lequel il est écrit.

Dieu nous préserve de l'historien qui n'est d'aucun temps, ni d'aucun pays !

NOTE 14.

Il n'est pas inutile de donner plus explicitement quelques détails sur cette méthode qui se rencontre plusieurs fois dans l'œuvre d'Abel.

Posons

$$\sqrt{(1-cx^2)(1-ex^2)} = \Delta(x), \qquad \sqrt{(1-c_1x^2)(1-e_1x^2)} = \Delta_1(x),$$

il faut déterminer une fonction rationnelle

$$y = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{ax^m + a'x^{m-1} + \ldots}{bx^m + b'x^{m-1} + \ldots},$$

telle que l'on ait

$$(1) \qquad \frac{dy}{\Delta_1(y)} = k\frac{dx}{\Delta(x)},$$

k étant une constante.

Abel considère x comme une fonction de y donnée par l'équation

$$P(x) - yQ(x) = 0;$$

soit alors x, x_1, ..., x_{m-1} les m racines, on a d'après (1)

$$(2) \qquad \frac{dy}{\Delta_1 y} = k\frac{dx}{\Delta(x)} = k\frac{dx_1}{\Delta(x_1)} = \ldots = k\frac{dx_{m-1}}{\Delta(x_{m-1})}.$$

Il considère alors la fonction inverse $x = \lambda(\theta)$ donnée par l'équation

$$d\theta = \frac{dx}{\Delta(x)},$$

soit

$$x = \lambda(\theta), \qquad x_1 = \lambda(\theta_1), \qquad \ldots, \qquad x_{m-1} = \lambda(\theta_{m-1}),$$

les égalités (2) donnent

$$d\theta = d\theta_1 = \ldots = d\theta_{m-1},$$

d'où

$$\theta_1 = \theta + \alpha_1, \qquad \theta_2 = \theta + \alpha_2, \qquad \ldots, \qquad \theta_{m-1} = \theta + \alpha_{m-1}.$$

Abel démontre alors que les quantités α_1, α_2, ..., α_{m-1} sont de la forme

$$\mu\varpi + \mu'\varpi',$$

ϖ et ϖ' étant les périodes de la fonction inverse, μ et μ' des nombres rationnels.

Ce raisonnement, jusqu'ici, s'applique au cas où l'on n'impose à la fonction y que d'être une fonction *algébrique* de x. La condition pour y d'être une fonction *rationnelle* de x permet de déterminer les valeurs que peuvent prendre (pour le degré m donné) les constantes μ et μ'.

Abel obtient alors y en fonction de θ en identifiant deux coefficients de la même puissance de x dans l'identité

$$P(x) - y\,Q(x) = (a - by)(x - \lambda(\theta))(x - \lambda(\theta + \alpha_1))\ldots(x - \lambda(\theta + \alpha_{m-1})),$$

par exemple

$$a' - b'y = -(a - by)(\lambda(\theta) + \lambda(\theta + \alpha_1)\ldots + \lambda(\theta + \alpha_{m-1}));$$

pour avoir y en fonction de x, il suffit d'exprimer en fonction de $\lambda(\theta) = x$ et des constantes $\lambda(\alpha_1)$, $\lambda(\alpha_2)$, ..., $\lambda(\alpha_{m-1})$ la somme contenue dans la parenthèse.

NOTE 15.

Voici l'exposé de ce long Mémoire dans lequel Abel a nettement exposé sa méthode.

Sur la résolution algébrique des équations.

Un des problèmes les plus intéressants de l'Algèbre est celui de la résolution algébrique des équations. Aussi on trouve que presque tous les géomètres d'un rang distingué ont traité ce sujet. On parvint sans difficulté à l'expression générale des racines des équations des quatre premiers degrés. On découvrit une méthode uniforme pour résoudre ces équations et qu'on croyait pouvoir appliquer à une équation d'un degré quelconque; mais, malgré les efforts de Lagrange et d'autres géomètres distingués, on ne put parvenir au but proposé. Cela fit présumer que la résolution des équations générales était impossible algébriquement; mais c'est sur quoi on ne pouvait pas décider, attendu que la

méthode adoptée n'aurait pu conduire à des conclusions certaines que dans le cas où les équations étaient résolubles. En effet, on se proposait de résoudre les équations sans savoir si cela était possible. Dans ce cas, on pourrait bien parvenir à la résolution, quoique cela ne fût nullement certain; mais si, par malheur, la résolution était impossible, on aurait pu chercher une éternité sans la trouver. Pour parvenir infailliblement à quelque chose dans cette matière, il faut donc prendre une autre route. On doit donner au problème une telle forme qu'il soit toujours possible de le résoudre, ce qu'on peut toujours faire d'un problème quelconque. Au lieu de demander une relation dont on ne sait pas si elle existe ou non, il faut demander si une telle relation est en effet possible. Par exemple, dans le Calcul intégral, au lieu de chercher, à l'aide d'une espèce de tâtonnement et de divination, d'intégrer les formules différentielles, il faut plutôt chercher, s'il est possible, de les intégrer de telle ou telle manière. En présentant un problème de cette manière, l'énoncé même contient le germe de la solution et montre la route qu'il faut prendre, et je crois qu'il y aura peu de cas où l'on ne parviendrait à des propositions plus ou moins importantes, dans le cas même où l'on ne saurait répondre complètement à la question à cause de la complication des calculs. Ce qui a fait que cette méthode qui, sans contredit, est la seule scientifique, parce qu'elle est la seule dont on sait d'avance qu'elle peut conduire au but proposé, a été peu usitée dans les Mathématiques, c'est l'*extrême complication* à laquelle elle paraît être assujettie dans la plupart des problèmes, surtout lorsqu'ils ont une certaine généralité; mais, dans bien des cas, cette complication n'est qu'apparente et s'évanouira dès le premier abord. J'ai traité plusieurs branches de l'Analyse de

cette manière, et, quoique je me sois souvent proposé des problèmes qui ont surpassé mes forces, je suis néanmoins parvenu à un grand nombre de résultats généraux qui jettent un grand jour sur la nature des quantités dont la connaissance est l'objet des Mathématiques. C'est surtout dans le Calcul intégral où cette méthode est facile à appliquer. Je donnerai dans une autre occasion les résultats auxquels je suis parvenu dans ces recherches et le procédé qui m'y a conduit. Dans ce Mémoire, je vais traiter le problème de la résolution algébrique des équations, dans toute sa généralité. Le premier et, si je ne me trompe, le seul qui, avant moi, ait cherché à démontrer l'impossibilité de la résolution algébrique des équations générales, est le géomètre Ruffini; mais son Mémoire est tellement compliqué qu'il est très difficile de juger de la justesse de son raisonnement. Il me paraît que son raisonnement n'est pas toujours satisfaisant. Je crois que la démonstration que j'ai donnée de ce théorème ne laisse rien à désirer du côté de la rigueur; mais elle n'a pas toute la simplicité dont elle est susceptible. Je suis parvenu à une autre démonstration, fondée sur les mêmes principes, qui est plus simple en cherchant à résoudre un problème plus général.

On sait que toute expression algébrique peut satisfaire à une équation d'un degré plus ou moins élevé, selon la nature particulière de cette expression. Il y a de cette manière une infinité d'équations particulières qui sont résolubles algébriquement. De là dérivent naturellement les deux problèmes suivants, dont la solution complète comprend toute la théorie de la résolution algébrique des équations, savoir :

1. Trouver toutes les équations d'un degré déterminé quelconque qui soient résolubles algébriquement.

2. Juger si une équation donnée est résoluble algébriquement ou non.

C'est la considération de ces deux problèmes qui est l'objet de ce Mémoire, et, quoique nous n'en donnions pas la solution complète, nous indiquerons néanmoins des moyens sûrs pour y parvenir. On voit que ces deux problèmes sont intimement liés entre eux, en sorte que la solution du premier doit conduire à celle du second. Dans le fond, ces deux théorèmes sont les mêmes. Dans le cours des recherches, on parviendra à plusieurs propositions générales sur les équations par rapport à leur résolubilité et à la forme des racines. Ce sont ces théories générales en quoi consiste véritablement la théorie des équations quant à leur résolution algébrique, car il importe peu si l'on sait qu'une équation d'une forme particulière est résoluble ou non. Une de ces propriétés générales est, par exemple, qu'il est impossible de résoudre algébriquement les équations générales passé le quatrième degré.

Pour plus de clarté, nous allons d'abord analyser en peu de mots le problème proposé.

D'abord, qu'est-ce que cela veut dire de *satisfaire algébriquement à une équation algébrique?* Avant tout, il faut fixer la notion de cette expression. Lorsqu'il s'agit d'une équation générale, dont tous les coefficients peuvent par conséquent être regardés comme des variables indépendantes, la résolution d'une équation doit consister à exprimer les racines en fonctions algébriques des coefficients. Ces fonctions pourront, selon la conception vulgaire de ce mot, contenir des quantités constantes, algébriques ou non. On pourra y ajouter, si l'on veut, comme condition particulière, que ces constantes seront de même des

quantités algébriques, ce qui modifierait un peu le problème. En général, il y a deux cas différents, selon que les coefficients contiendront des quantités variables ou non. Dans le premier cas, les coefficients seront des *fonctions rationnelles* d'un certain nombre de quantités $x, z, z', z'', \ldots$, qui contiendront au moins une variable indépendante x. Nous supposons que les autres sont des fonctions quelconques de celle-là. Dans ce cas, nous dirons qu'on peut *satisfaire algébriquement* à l'équation proposée si l'on peut y satisfaire en mettant, au lieu de l'inconnu, une fonction algébrique de $x, z, z', z'', \ldots$. Nous dirons de même que l'équation est *résoluble algébriquement*, si l'on peut exprimer toutes les racines de cette manière. L'expression des racines pourra, dans ce cas de coefficients variables, contenir des quantités constantes quelconques, algébriques ou non.

Dans le second cas, où l'on regarde les coefficients comme des quantités constantes, on peut concevoir que ces coefficients sont formés d'autres quantités constantes à l'aide d'opérations rationnelles. Désignons ces dernières quantités par $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$; nous dirons qu'on peut satisfaire algébriquement à l'équation proposée, s'il est possible d'exprimer une ou plusieurs racines en $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ à l'aide d'opérations algébriques. Si l'on peut exprimer toutes les racines de cette manière, nous dirons que l'équation est résoluble algébriquement; $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ pourront d'ailleurs être quelconques, algébriques ou non. Dans le cas particulier où tous les coefficients sont rationnels, on peut donc satisfaire algébriquement à l'équation, si une ou plusieurs de ses racines sont des quantités algébriques.

Nous avons distingué deux espèces d'équations : celles qui sont résolubles algébriquement et celles auxquelles on peut satis-

faire algébriquement. En effet, on sait qu'il y a des équations dont une ou plusieurs racines sont algébriques, sans qu'on puisse affirmer la même chose pour toutes les racines.

Cela posé, la marche naturelle pour résoudre notre problème se prête d'elle-même d'après l'énoncé, savoir : il faut substituer, dans l'équation proposée, à la place de l'inconnu, l'expression algébrique la plus générale, et ensuite chercher, s'il est possible, de lui satisfaire de cette manière. Pour cela, il faut avoir l'expression générale d'une quantité algébrique et d'une fonction algébrique. On aura donc d'abord le problème suivant :

« Trouver la forme la plus générale d'une expression algébrique. »

Après avoir trouvé cette forme, on aura l'expression d'une racine algébrique d'une équation algébrique quelconque.

La première condition à laquelle cette expression algébrique doit être assujettie, est qu'elle doit satisfaire à une équation algébrique. Or, comme on sait, elle peut le faire dans toute sa généralité. Cette première condition est donc remplie d'elle-même. Pour savoir maintenant si elle peut être particularisée de sorte qu'elle satisfasse à l'équation proposée, il faut chercher toutes les équations auxquelles elle puisse satisfaire, et ensuite comparer ces équations à la proposée. On aura donc ce problème :

« Trouver toutes les équations possibles auxquelles une fonction algébrique puisse satisfaire. »

Il est clair qu'une même fonction algébrique peut satisfaire à une infinité d'équations différentes. Donc, lorsque l'équation proposée peut être satisfaite algébriquement, il y aura deux cas : ou cette équation sera la moins élevée à laquelle elle puisse satis-

faire, ou il doit exister une autre de la même forme à laquelle elle puisse satisfaire, qui est d'un degré moins élevé, et qui est la plus simple. Dans le premier cas, nous dirons que l'équation est *irréductible*, et dans l'autre, qu'elle est *réductible*. Le problème proposé se décompose ainsi en ces deux autres :

1° « Juger si une équation proposée est réductible, ou non;
2° » Juger si cette équation irréductible peut être satisfaite algébriquement, ou non. »

Considérons d'abord le second problème. L'équation proposée étant irréductible, elle est par là la plus simple équation à laquelle l'expression algébrique cherchée pourra satisfaire. Donc, pour s'assurer si elle peut être satisfaite ou non, il faut chercher l'équation la moins élevée à laquelle une expression algébrique puisse satisfaire, et ensuite comparer cette équation à l'équation proposée. De là naît le problème :

« Trouver l'équation la moins élevée à laquelle une fonction algébrique puisse satisfaire. »

La solution de ce problème sera l'objet d'un second paragraphe. On aura ainsi toutes les équations irréductibles qui pourront être satisfaites algébriquement. L'analyse conduit aux théorèmes suivants :

1. « Si une équation irréductible peut être satisfaite algébriquement, elle est en même temps résoluble algébriquement, et toutes les racines pourront être représentées par la même expression en donnant à des radicaux qui s'y trouvent, toutes leurs valeurs. »

. « Si une expression algébrique satisfait à une équation quelconque, on pourra toujours lui donner une telle forme

qu'elle y satisfasse encore, en attribuant à tous les différ[…] radicaux dont elle se compose, toutes les valeurs dont ils […] susceptibles. »

3. « Le degré d'une équation irréductible, résoluble algé[…]quement, est nécessairement le produit d'un certain nom[…] d'exposants de radicaux qui se trouvent dans l'expression […] racines. »

Ayant ainsi montré comment on peut parvenir à l'équation […] moins élevée à laquelle pourra satisfaire une expression alg[…]brique quelconque, la marche la plus naturelle serait de form[…] cette équation et de la comparer à l'équation proposée, mais […] tombe ici dans des difficultés qui paraissent insurmontables. Ca[…] quoi qu'on ait assigné une règle générale pour former dan[…] chaque cas particulier l'équation la plus simple, on est loi[…] d'avoir par là l'équation même. Et, quand même on parviendrai[…] à trouver cette équation, comment juger si des coefficients d'un[…] telle complication pouvaient en effet être égaux à ceux de l'équa[…]tion proposée. Mais je suis parvenu au but proposé en suivant une autre route, savoir en généralisant le problème.

D'abord, l'équation étant donnée, son degré le sera de même. Il se présente donc maintenant d'abord ce problème :

« Trouver l'expression algébrique la plus générale qui puisse satisfaire à une équation d'un degré donné. »

On est conduit naturellement à considérer deux cas, selon que le degré de l'équation est un nombre premier ou non.

Quoique nous n'ayons pas donné la solution complète de ce problème, néanmoins la marche naturelle de la solution a conduit à plusieurs propositions générales, très remarquables en elles-mêmes, et qui ont conduit à la solution du problème dont nous

nous occupons. Les plus importantes de ces propositions sont les suivantes :

1. « Si une équation irréductible d'un degré premier μ est résoluble algébriquement, les racines auront la forme suivante :

$$y = A + \sqrt[\mu]{R_1} + \sqrt[\mu]{R_2} + \ldots + \sqrt[\mu]{R_{\mu-1}},$$

où A est une quantité rationnelle, et $R_1, R_2, \ldots, R_{\mu-1}$ les racines d'une équation du degré $\mu - 1$. »

2. « Si une équation irréductible, dont le degré est une puissance d'un nombre premier μ^a, est résoluble algébriquement, il doit arriver l'un de deux : ou l'équation est décomposable en $\mu^{a-\beta}$ équations, chacune du degré μ^β, et dont les coefficients dépendront des équations du degré $\mu^{a-\beta}$; ou bien on pourra exprimer une quelconque des racines par la formule

$$y = A + \sqrt[\mu]{R_1} + \sqrt[\mu]{R_2} + \ldots + \sqrt[\mu]{R_\nu},$$

où A est une quantité rationnelle, $R_1, R_2, \ldots, R_\nu$ des racines d'une même équation du degré ν, ce dernier nombre étant tout au plus égal à $\mu^a - 1$. »

3. « Si une équation irréductible d'un degré μ, divisible par des nombres premiers différents entre eux, est résoluble algébriquement, on peut toujours décomposer μ en deux facteurs μ_1 et μ_2, de sorte que l'équation proposée soit décomposable en μ_1 équations, chacune du degré μ_2, et dont les coefficients dépendent d'équations du degré μ_1. »

4. Si une équation irréductible du degré μ^a, où μ est premier, est résoluble algébriquement, on pourra toujours exprimer une

quelconque des racines par la formule

$$y = f(\sqrt[\mu]{R_1}, \sqrt[\mu]{R_2}, \ldots, \sqrt[\mu]{R_\alpha}),$$

où f désigne une fonction rationnelle et symétrique des radicaux entre les parenthèses, et $R_1, R_2, \ldots, R_\alpha$ des racines d'une même équation dont le degré est tout au plus égal à $\mu^\alpha - 1$. »

Ces théorèmes sont les plus remarquables auxquels je suis parvenu, mais outre cela on trouvera dans le cours du Mémoire une foule d'autres propriétés générales des racines, propriétés qu'il serait trop long de rapporter ici. Je dirai seulement un mot sur la nature des radicaux qui pourront se trouver dans l'expression des racines. D'abord le troisième théorème fait voir que, si le degré d'une équation irréductible est représenté par

$$\mu_1^{\alpha_1} . \mu_2^{\alpha_2} . \mu_3^{\alpha_3} \ldots \mu_\omega^{\alpha_\omega},$$

il ne pourra dans l'expression des racines se trouver d'autres radicaux que ceux qui pourront se trouver dans l'expression des racines d'équations de degrés $\mu_1^{\alpha_1} . \mu_2^{\alpha_2} . \mu_3^{\alpha_3} \ldots \mu_\omega^{\alpha_\omega}$.

A l'aide des théorèmes généraux auxquels on est ainsi parvenu, on en a ensuite déduit une règle générale pour reconnaître si une équation proposée est résoluble, ou non. En effet, on est conduit à ce résultat remarquable que, si une équation irréductible est résoluble algébriquement, on pourra dans tous les cas trouver les racines à l'aide de la méthode de Lagrange proposée pour la résolution des équations; savoir, en suivant la marche de Lagrange on doit parvenir à des équations qui aient au moins une racine qui puisse s'exprimer rationnellement en les coefficients. Il y a plus, Lagrange a fait voir qu'on peut ramener la

résolution d'une équation du degré à celle de équations respectivement des degrés à l'aide d'une équation du degré (¹). Nous démontrerons que c'est une équation qui doit nécessairement avoir au moins une racine exprimable rationnellement en ses coefficients pour que l'équation proposée soit résoluble algébriquement.

Donc, si cette condition n'est pas remplie, c'est une preuve incontestable que l'équation n'est pas résoluble; mais il est à remarquer qu'elle peut être remplie sans que l'équation soit en effet résoluble algébriquement. Pour le reconnaître, il faut encore soumettre les équations auxiliaires au même examen. Cependant, dans le cas où le degré de la proposée est un nombre premier, la première condition suffira toujours comme nous le montrerons. De ce qui précède, il a été facile ensuite de tirer comme corollaire qu'il est impossible de résoudre les équations générales.

(*Œuvres complètes de N.-H. Abel*, édition Holmboë, t. II, p. 185-192, Christiania, 1839).

(¹) Les quatre lacunes se trouvent dans le texte manuscrit d'Abel. On eut rétablir son texte, ce qu'a fait Holmboë dans une Note de l'édition e 1839 :

Lagrange a démontré que la résolution de toute équation du degré m, m est un nombre premier, peut être réduite à la résolution de deux uations respectivement de degré $m-1$ et $1.2\ldots(m-2)$. Si, au conaire, m est un nombre composé égal à np, n étant premier, la résolun de l'équation du degré m peut être ramenée à la résolution de équations du degré p et à une équation du degré $n-1$, dont les coeffints dépendent d'une équation de degré $\frac{1.2.3\ldots m}{n(n-1)(1.2.3\ldots p)^n}$ (Voyez GRANGE, *Traité de la Résolution des équations numériques*, Note XIII).

NOTE 16.

Nous donnons ici cette démonstration, remarquable par son extrême simplicité.

La théorie de la transformation devient très facile à l'aide des propriétés les plus simples de la fonction $\lambda\theta$. Pour en donner un exemple, soit proposé le problème : satisfaire de la manière la plus générale à l'équation

$$\frac{dy}{\Delta(y, c')} = \varepsilon \frac{dx}{\Delta(x, c)},$$

en supposant c et c' moindres que l'unité et y fonction rationnelle, réelle ou imaginaire de x.

Soit $x = \lambda\theta$, $y = \lambda'\theta'$, en désignant par λ' la fonction qui répond au module c'. L'équation différentielle se changera dans ce cas en $d\theta' = \varepsilon d\theta$, d'où

$$\theta' = \varepsilon\theta + a,$$

a étant une constante. Cela posé, soit

$$y = \frac{\varphi x}{fx},$$

on aura

$$\lambda'(\varepsilon\theta + a) = \frac{\varphi(\lambda\theta)}{f(\lambda\theta)}.$$

En mettant $\theta + 2\varpi$, $\theta + \varpi i$ [1] au lieu de θ, $\lambda\theta$ ne change pas

---

[1] Abel pose

$$\frac{\varpi}{2} = \int_0^1 \frac{dx}{\Delta(x, c)}, \qquad \frac{\omega}{2} = \int_0^1 \frac{dx}{\Delta(x, b)}$$

où

$$b^2 + c^2 = 1.$$

Il écrit $\lambda\theta$ pour $\lambda(\theta)$.

de valeur et par conséquent on doit avoir

$$\lambda'(\varepsilon\theta + \varepsilon\varpi i + a) = \lambda'(\varepsilon\theta + a),$$
$$\lambda'(\varepsilon\theta + 2\varepsilon\varpi + a) = \lambda'(\varepsilon\theta + a).$$

Donc, si l'on désigne par ϖ' et ω' les valeurs de ϖ et ω qui répondent au module c', on aura [en vertu de (2)]:

$$2\varepsilon\varpi = 2m\varpi' + n\varpi' i,$$
$$\varepsilon\varpi i = 2m'\varpi' + n'\omega' i,$$

ce qui donne

$$\varepsilon = m\frac{\varpi'}{\varpi} + \frac{n}{2}\frac{\omega'}{\varpi}i = n'\frac{\omega'}{\omega} - 2m'\frac{\varpi'}{\omega}i,$$

donc

$$m\frac{\varpi'}{\varpi} = n'\frac{\omega'}{\omega'}, \qquad \frac{n}{2}\frac{\omega'}{\varpi} = -2m'\frac{\varpi'}{\omega},$$

ou bien

$$\frac{\varpi'}{\omega'} = \frac{n'}{m}\frac{\varpi}{\omega} = -\frac{n}{4m'}\frac{\omega}{\varpi}.$$

Maintenant, si c est indéterminé, cette équation ne pourra subsister à moins qu'on n'ait ou $n = 0$, $m' = 0$, ou $n' = 0$, $m = 0$. Dans le premier cas ε est réel et

$$= m\frac{\varpi'}{\varpi} = n'\frac{\omega'}{\omega},$$

et dans le second cas ε est imaginaire et

$$= \frac{n}{2}\frac{\varpi'}{\varpi}i = -2m'\frac{\varpi'}{\omega}i.$$

Supposons ε réel. Alors on aura ce théorème :

« Si deux fonctions réelles peuvent être transformées l'une en

l'autre il faut qu'on ait entre les fonctions complètes ϖ, ω, ϖ', ω' cette relation

$$\frac{\varpi'}{\omega'} = \frac{n'}{m}\frac{\varpi}{\omega},$$

où n' et m sont des nombres entiers. »

On pourra démontrer que, si cette condition est remplie, on pourra effectivement satisfaire à l'équation

$$\int \frac{dy}{\Delta(x, c')} = m\frac{\varpi'}{\varpi}\int \frac{dx}{\Delta(x, c)}.$$

Rien n'est plus simple que de trouver l'expression de y. Il suffit pour cela de chercher les racines des deux équations $\varphi x = 0$, $fx = 0$.

Désignons par $\lambda\delta$ et $\lambda\delta'$ une racine quelconque de ces deux équations, on aura, pour déterminer δ et δ', ces deux équations :

$$\lambda'(\varepsilon\delta + a) = 0, \qquad \lambda'(\varepsilon\delta' + a) = \frac{1}{0},$$

ce qui donne

$$\delta = -a + \frac{k}{\varepsilon}\varpi' + \frac{k'}{\varepsilon}\omega' i; \qquad \delta' = -a + \frac{k}{\varepsilon}\varpi' + \left(k' + \frac{1}{2}\right)\frac{\omega'}{\varepsilon} i,$$

c'est-à-dire

$$\delta = -a + \frac{k}{m}\omega + \frac{k'}{n'}\omega i, \qquad \delta' = -a + \frac{k}{m}\varpi + \left(k' + \frac{1}{2}\right)\frac{\omega}{n'} i,$$

k et k' étant des nombres entiers. Pour trouver a, il suffit de remarquer que $\lambda\theta$ ne change pas de valeur en mettant $\varpi - \theta$ au lieu de θ. On aura donc

$$\lambda'(\varepsilon\varpi - \varepsilon\theta + a) = \lambda'(\varepsilon\theta + a),$$

qui donne

$$a = \frac{1}{2}((2\mu + 1 - m)\varpi' + \mu'\omega' i).$$

ans le cas où m est impair, on pourra toujours faire $a = 0$.

Connaissant les valeurs de δ et δ', on aura immédiatement les cines des deux équations $\varphi x = 0$, $fx = 0$, et par suite l'expression des fonctions φx et fx en factorielles. Les formules les us simples répondent aux cas de $m = 1$ ou $n' = 1$, et elles sont seules dont il s'agit, comme il est aisé de voir par l'équation $= \frac{n'}{m}\frac{\varpi}{\omega}$. On pourra aussi se servir des expressions de la fonction $\lambda\theta$ en produits infinis rapportés plus haut. J'ai fait voir cela ns les Mémoires....

NOTE 17.

Voici le passage de la lettre de Crelle (18 mai) :

« M. Fuss m'écrit, de Saint-Pétersbourg, qu'ils lui ont causé un grand aisir. M. Gauss, de Göttingue, que j'avais prié aussi de m'envoyer quelque ose sur les fonctions elliptiques dont il s'est occupé, m'a-t-on dit, depuis us de 30 ans, m'écrit les lignes suivantes :

« D'autres occupations m'empêchent pour le moment de rédiger ces echerches. M. Abel m'a devancé, au moins pour le tiers de ces travaux. Il vient justement de s'engager dans la voie où j'ai abouti en 1798. e n'ai donc pu m'étonner que, pour la majeure partie, il soit arrivé ux mêmes résultats. Et comme, d'autre part, son exposition témoigne e tant de pénétration et d'élégance, je me vois par là même dispensé exposer les mêmes questions... »

Ce jugement de M. Gauss m'a fait grand plaisir. »

NOTE 18.

ici le texte de ce Mémoire :

DÉMONSTRATION D'UNE PROPRIÉTÉ GÉNÉRALE D'UNE CERTAINE CLASSE DE FONCTIONS TRANSCENDANTES.

Théorème. — Soit y une fonction de x qui satisfait à une équation irréductible de la forme

$$(1) \qquad 0 = p_0 + p_1 y + p_2 y^2 + \ldots + p_{n-1} y^{n-1} + y^n,$$

où $p_0, p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}$ sont des fonctions entières de la variable x. Soit

$$(2) \qquad 0 = q_0 + q_1 y + q_2 y_2 + \ldots + q_{n-1} y^{n-1}$$

une équation semblable, $q_0, q_1, q_2, \ldots, q_{n-1}$ étant également des fonctions entières de x, et supposons variables les coefficients des diverses puissances de x dans ces fonctions. Nous désignerons ces coefficients par $a, a', a'', \ldots$. En vertu des deux équations (1) et (2), x sera fonction de $a, a', a'', \ldots$, et l'on en déterminera les valeurs en éliminant la quantité y. Désignons par

$$(3) \qquad \rho = 0$$

le résultat de l'élimination, en sorte que ρ ne contiendra que les variables $x, a, a', a'', \ldots$. Soit μ le degré de cette équation par rapport à x, et désignons par

$$(4) \qquad x_1, x_2, x_3, \ldots, x_\mu$$

ses μ racines, qui seront autant de fonctions de $a, a', a'', \ldots$. Cela

posé, si l'on fait

(5) $$\psi x = \int f(x, y)\, dx,$$

où $f(x, y)$ désigne une fonction rationnelle quelconque de x et de y, je dis que la fonction transcendante ψx jouira de la propriété générale exprimée par l'équation suivante :

(6) $$\psi x_1 + \psi x_2 + \ldots + \psi x_\mu$$
$$= u + k_1 \log v_1 + k_2 \log v_2 + \ldots + k_n \log v_n,$$

$u, v_1, v_2, \ldots, v_n$ étant des fonctions rationnelles de $a, a', a'', \ldots$ et $k_1, k_2, \ldots, k_n$ des constantes.

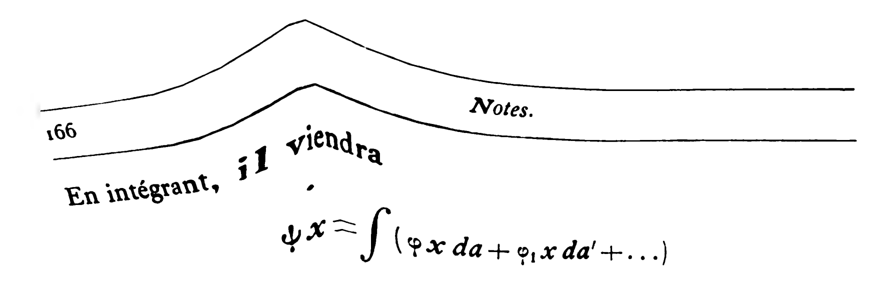
Démonstration. — Pour prouver ce théorème, il suffit d'exprimer la différentielle du premier membre de l'équation (6) en fonction de $a, a', a'', \ldots$; car il se réduira par là à une différentielle rationnelle, comme on le verra. D'abord les deux équations (1) et (2) donneront y en fonction rationnelle de $x, a, a', a'', \ldots$. De même l'équation (3) $\rho = 0$ donnera pour dx une expression de la forme

$$dx = \alpha\, da + \alpha'\, da' + \alpha''\, da'' + \ldots,$$

ù $\alpha, \alpha', \alpha'', \ldots$ sont des fonctions rationnelles de $x, a, a', a'', \ldots$. e là il suit que la différentielle $f(x, y)\, dx$ pourra être mise us la forme

$$f(x, y)\, dx = \varphi x\, da + \varphi_1 x\, da' + \varphi_2 x\, da'' + \ldots,$$

$\varphi x, \varphi_1 x, \ldots$ sont des fonctions rationnelles de $x, a, a', a'', \ldots$.



En intégrant, il viendra

$$\psi x = \int (\varphi x\, da + \varphi_1 x\, da' + \ldots)$$

et de là on tire, en remarquant que cette équation aura lieu en mettant pour x les μ valeurs de cette quantité,

$$(7) \quad \psi x_1 + \psi x_2 + \psi x_\mu = \int (\varphi x_1 + \varphi x_2 + \ldots + \varphi x_\mu)\, da + (\varphi_1 x_1 + \varphi_1 x_2 + \ldots + \varphi_1 x_\mu)\, da' + \ldots.$$

Dans cette équation, les coefficients des différentielles da, da', ... sont des fonctions rationnelles de a, a', a'', ... et de x_1, x_2, ..., x_μ; mais d'ailleurs ils sont symétriques par rapport à x_1, x_2, ..., x_μ; donc, en vertu d'un théorème connu, on pourra exprimer ces fonctions rationnellement par a, a', a'', ... et par les coefficients de l'équation $\rho = 0$; mais ceux-ci sont eux-mêmes des fonctions rationnelles des variables a, a', a'', ..., donc enfin les coefficients de da, da', da'', ... de l'équation (7) le seront également. Donc, en intégrant, on aura une équation de la forme (6).

Je me propose de développer dans une autre occasion de nombreuses applications de ce théorème qui jetteront un grand jour sur la nature des fonctions transcendantes dont il s'agit [1].

Christiania, le 6 janvier 1829.

(*Œuvres complètes de N.-H. Abel,* édition Holmboë, t. I, p. 324-325, Christiania, 1839).

---

[1] Abel avait écrit : *qui jetteront du jour ;* c'est Crelle qui, à la publication, transforma en : *qui jetteront un grand jour.*

NOTE 19.

Bjerknes a indiqué dans son Ouvrage plusieurs autres raisons qui se joignent à la raison générale que nous avons donnée. Le Mémoire de Paris étant écrit d'une encre très pâle, les yeux de 80 ans de Legendre ne purent le déchiffrer; il paraît qu'il demanda à Abel d'en faire une copie (Abel n'a pas parlé de cette démarche). Bjerknes ajoute, comme dernière cause, la révolution de 1830, après laquelle, on le sait, Cauchy, fervent royaliste, suivit son maître en exil.

NOTE 20.

Voici l'extrait d'une lettre écrite par Gauss à Shumacher. La pensée touchante qu'exprime cette lettre prouve combien Abel eut tort de se défier du géomètre de Göttingue :

« La mort d'Abel, que je n'ai pas vue publiée dans les journaux, est une
» très grande perte pour la Science. S'il existe peut-être, ou, si l'on imprime
» quelque chose sur les détails de la vie de cette tête extrêmement remar-
» quable, et si cela vous tombe entre les mains, je vous prie vivement de
» me le communiquer. Je voudrais bien aussi avoir son portrait... »

NOTE 21.

Les travaux de Galois sur les fonctions abéliennes sont seulement in-
liqués dans la lettre qu'il écrivit à Auguste Chevallier, avant le duel où il
levait trouver la mort. Dans ce passage il ne cite même pas le nom d'Abel.

NOTE 22.

On dira qu'il y a là une distinction bien trop nette entre la Science pure
la Science d'application. Il est vrai qu'elles sont souvent tributaires
ıne de l'autre, mais pourrait-on affirmer que la Science d'application ait
mais donné à la Science pure une impulsion qui puisse être comparée
celle que donna, par exemple, le théorème d'Abel? On pourra citer la
éorie des fonctions discontinues qui semble bien due à la considération

de la série de Fourier, née elle-même d'une recherche concernant la chaleur. Mais cette descendance est-elle absolument certaine, et, d'ailleurs, la considération des discontinuités ne devait-elle pas naître de l'étude même des fonctions?

FIN.

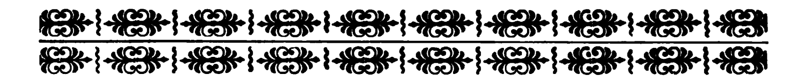
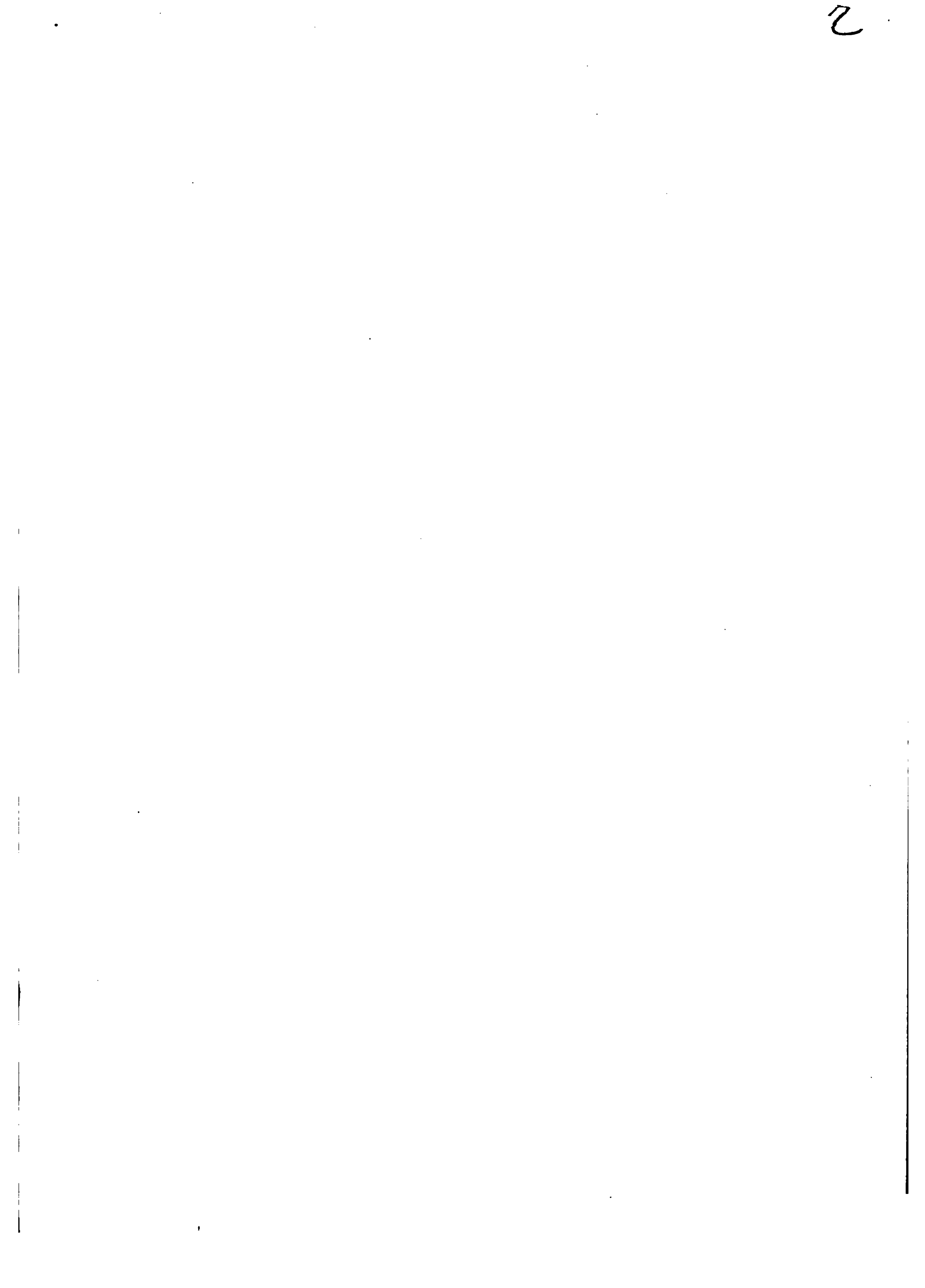
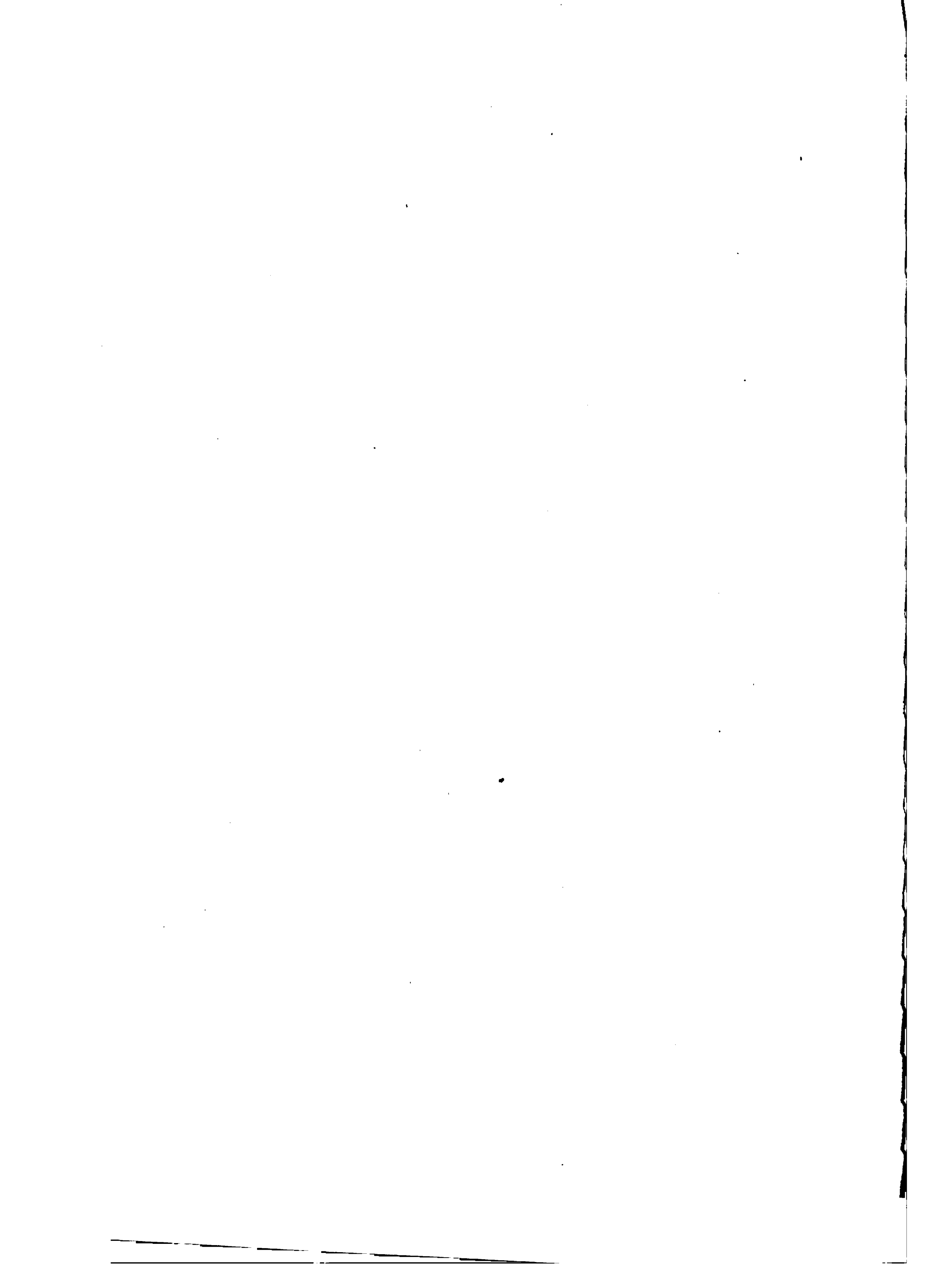


TABLE DES MATIÈRES.



37483. — Paris, Imprimerie Gauthier-Villars, 55, quai des Grands-Augustins.








CANCELLED
APR 18 1981
7103726


CANCELLED
APR 16 1981
7103726

